
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01037978 2

LEÇONS

SUR LE

PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

A LA MÊME LIBRAIRIE

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL,
PROFESSEUR DE THÉORIE DES FONCTIONS A L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par M. ÉMILE BOREL; 1898 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions entières, par M. ÉMILE BOREL; 1900 ..... 3 fr. 50

Leçons sur les séries divergentes, par M. ÉMILE BOREL; 1901 ..... 4 fr. 50

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *R. d'Adhémar*; 1902.. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *Ludovic Zoretti*; 1903.. 3 fr. 50

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE; 1904. 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *Maurice Fréchet*, avec des Notes de M. PAUL PAINLEVÉ et de M. HENRI LEBESGUE; 1905 .... 4 fr. 50

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France par M. RENÉ BAIRE, rédigées par M. *A. Denjoy*; 1905....... 3 fr. 50

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par M. ERNST LINDELÖF; 1905 .... 3 fr. 50

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par M. HENRI LEBESGUE; 1906 .... 3 fr. 50

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, professées au Collège de France par M. PIERRE BOUTROUX, avec une Note de M. PAUL PAINLEVÉ; 1908 .... 6 fr. 50

Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, par M. OTTO BLUMENTHAL; 1910 .... 5 fr. 50

Leçons sur la théorie de la croissance, par M. ÉMILE BOREL, rédigées par M. *A. Denjoy*; 1910 .... 5 fr. 50

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par M. PAUL MONTEL; 1910 .... 3 fr. 50

EN PRÉPARATION :

Sur l'inversion des intégrales définies, par M. VITO VOLTERRA.

Les systèmes d'équations à une infinité d'inconnues, par M. FRÉDÉRIC RIESZ.

Leçons sur quelques questions d'*Analysis situs*, par M. HENRI LEBESGUE.

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par M. PIERRE COUSIN.

Leçons sur les correspondances entre variables réelles, par M. JULES DRACH.

Leçons sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et son application à la théorie des nombres premiers, par M. HELGE VON KOCH.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,
PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS
SUR LE
PROLONGEMENT ANALYTIQUE

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE,

PAR

Ludovic ZORETTI,
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

PRÉFACE.

M. Borel a bien voulu me demander de publier, dans sa *Collection de Monographies sur la théorie des fonctions*, les leçons que j'ai eu l'honneur de faire au Collège de France pendant l'année scolaire 1908-1909 (fondation Peccot). Ce sont ces leçons que j'ai réunies dans le présent Livre. Comme c'est l'usage dans la Collection, je les ai rédigées en supposant au lecteur le minimum de connaissances, et en allant dans chaque question aussi loin que le permet l'état actuel de la théorie. On ne s'étonnera donc pas de trouver à plusieurs reprises des questions amorcées et non traitées à fond. C'est justement le but de cette Collection de fournir aux chercheurs un guide, en les mettant rapidement au courant de l'état d'une question, en précisant la nature des difficultés qui ont jusqu'ici empêché d'aller plus loin, et en leur indiquant en même temps, sans prétendre faire une bibliographie complète, les premiers Ouvrages qu'ils auront à consulter.

J'ai voulu étudier dans ses dernières conséquences la belle définition de Weierstrass de la fonction analytique. Systématiquement, méthodes et résultats n'empruntent rien aux points de vue de Cauchy et de Riemann. On verra comment on peut, en creusant simplement la définition du prolongement analytique, soit parvenir à des théorèmes importants par leur généralité, soit éclairer d'un jour nouveau des résultats anciens, comme par exemple le théorème de M. Picard. On verra aussi combien nombreuses et intéressantes sont les

questions qu'on est amené à se poser. Elles sont d'ailleurs de celles qu'on ne peut pas indéfiniment éluder : la théorie analytique des équations différentielles, la théorie même des fonctions entières ont de plus en plus leur développement ultérieur lié aux progrès des théories dont il est question ici.

Quelques différences subsistent entre mon cours et sa rédaction actuelle. J'ai éliminé de ce Livre ce qui avait déjà été dit dans d'autres Livres de la Collection ; j'ai supprimé également mes dernières recherches sur la théorie des ensembles que j'avais partiellement exposées au cours parce que j'estime qu'elles pourront être utilisées dans l'étude de ces questions, mais dont je n'avais pas l'utilisation immédiate.

Au contraire, j'ai dû signaler des résultats nouveaux publiés depuis que le cours a été fait. J'en ai fait état, soit dans le texte même, soit en les indiquant en note. De préférence, ce dernier mode a été employé pour les travaux les plus récents pour lesquels les démonstrations ne sont pas encore publiées. Le lecteur pourra ainsi mesurer le chemin parcouru en un an; il pourra aussi se convaincre de l'actualité de ces questions. Le grand Mémoire de M. H. Poincaré (*Acta*, t. XXXI) va sans doute susciter des recherches encore plus nombreuses. Je serai heureux si, pour ces recherches, ce Livre peut rendre quelques services.

J'adresse en terminant mes remercîments à M. Gauthier-Villars qui a édité cet Ouvrage avec sa distinction habituelle.

Grenoble, le 20 septembre 1910.

LEÇONS

SUR LE

PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

INTRODUCTION.

C'est Cauchy qu'on doit considérer comme le créateur de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. C'est en effet à lui qu'on doit l'introduction dans la science de la notion de fonction holomorphe et de la possibilité de son développement en série de Taylor. De là se déduisait tout naturellement la notion de rayon de convergence et celle de point singulier. Et l'intégrale de Cauchy permettait de classer immédiatement ces points en *pôles* et *points essentiels*.

A l'époque de Cauchy, et même encore pour un certain nombre de ses successeurs, la notion de fonction se confondait identiquement avec celle d'expression analytique. C'est le grand mérite de Weierstrass ([1]) d'avoir su le premier se poser nettement la question suivante : soient deux expressions analytiques bien définies dans un domaine D d'un seul tenant ; est-on bien assuré que si ces deux expressions ont la même valeur numérique pour toutes les valeurs de la variable situées dans une portion de D, il en sera de même dans tout le domaine D ? Or, moyennant un calcul assez compliqué, Weierstrass parvint à former un exemple du contraire ([2]). D'autres questions dérivaient naturellement de ce ré-

([1]) Il n'entre pas dans mes intentions de faire ici l'historique de la notion de fonction. Mais il est impossible de ne pas signaler les recherches de Paul du Bois Reymond et de Dini, et de ne pas prononcer le nom de Riemann.

([2]) Voir dans les *Berliner Sitzungsberichte*, 1881, un exemple plus simple de M. J. Tannery.

sultat : d'abord, une expression analytique quelconque doit-elle toujours être considérée comme représentant une seule fonction ou subsidiairement, quelles restrictions faut-il apporter aux expressions qu'on considère pour qu'on puisse affirmer qu'elles représentent une seule fonction, et quelles sont les propriétés caractéristiques de *la fonction* qu'on désire surtout conserver? Généralisant ce résultat, prenons deux expressions analytiques différentes existant l'une dans un domaine D, l'autre dans un domaine D' ; supposons que D et D' aient une portion commune Δ: à quelles conditions devrons-nous considérer la seconde expression comme la *continuation* de la première, comme définissant la même fonction que celle-ci? Une condition essentielle, c'est évidemment que les deux expressions prennent la même valeur dans Δ; on peut à la rigueur s'en contenter, mais, si l'on se propose de diminuer la généralité des fonctions qu'on considère pour augmenter le nombre de leurs propriétés générales et le champ de leurs applications, il conviendra d'ajouter à la condition précédente d'autres conditions de nature à écarter l'exemple singulier donné plus haut, de fonctions coïncidant dans une aire sans coïncider partout où elles sont définies ou, ce qui revient à peu près au même, d'une fonction nulle dans une aire sans l'être partout. Weierstrass y parvient en particularisant à la fois les domaines D, D' et la forme des expressions analytiques considérées: il prend pour domaine un cercle et pour expression une série ordonnée suivant les puissances de $z - a$ (a étant le centre du cercle), et c'est ainsi qu'il parvient à la notion de *prolongement analytique*, de *fonction analytique*, de *domaine d'existence* et de *frontière* de ce domaine ([1]).

Si la généralité de ces notions paraît d'une grande beauté synthétique, on peut, d'une part, redouter qu'il soit difficile de les introduire dans les raisonnements, et, d'autre part, on peut penser que des considérations aussi complexes sont inutiles dans l'étude des fonctions usuelles. Mais le développement ultérieur de la théorie des fonctions a bien montré le rôle de plus en plus pré-

---

([1]) Il va sans dire que les conditions dont je viens de parler pourraient être remplies en particularisant d'une façon différente les expressions considérées. On trouvera dans la Thèse de M. Borel et dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* des essais de ces généralisations de la notion de fonction analytique et des considérations sur le problème tel que je viens de le poser.

pondérant de la notion de fonction analytique, d'abord parce que l'Analyse introduisait de la façon la plus naturelle des transcendantes de plus en plus compliquées : ensuite parce que dans un grand nombre de cas on se voyait obligé, pour établir des théorèmes indispensables, de revenir à la définition de Weierstrass, comme la seule permettant des raisonnements suffisamment généraux. Et c'est ainsi que cette définition, qui pouvait paraître au début ne devoir servir qu'à la classification, devenait de plus en plus un outil indispensable au progrès.

Une des premières questions qu'on soit amené à traiter, au sujet d'une fonction analytique, est certainement celle de la détermination de son domaine d'existence d'après le procédé qui sert à la définir; il convient, en second lieu, d'étudier la façon dont se comporte la fonction au voisinage d'un de ses points singuliers. Dans ces *Leçons*, je m'occuperai successivement des deux problèmes.

A la première question se rattachent par exemple les travaux de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, certaines recherches sur la série de Taylor, la théorie analytique des équations différentielles.

La seconde question a fait également l'objet de nombreuses recherches. Le premier résultat est relatif à l'indétermination d'une fonction au voisinage d'un point essentiel isolé, résultat dû à Weierstrass, immédiatement complété par le théorème si précis de M. Picard. Pour étendre ces résultats, il devenait nécessaire d'avoir recours à la théorie des ensembles élaborée à cette même époque par M. Cantor qui y avait été conduit par des raisons bien différentes. Et tout de suite il apparut que le théorème de Weierstrass s'étendait sans modification à un très grand nombre de cas. Cependant, quelques cas restaient en dehors de ces généralisations; on les laissa provisoirement de côté, et l'on dirigea plutôt les efforts, dans les cas où le théorème de Weierstrass s'appliquait, vers une étude plus approfondie de l'allure de la fonction. Il faut citer dans cet ordre d'idées les beaux travaux sur les fonctions entières dont le germe est dans les idées de Laguerre et dont la base est le Mémoire de M. Poincaré paru en 1883 au *Bulletin de la Société Mathématique;* les résultats obtenus sont si précis, que la matière semblerait épuisée si de nouvelles directions, comme nous le verrons, ne venaient pas s'offrir aux chercheurs.

Mais tandis qu'on atteignait à une précision si grande dans le cas des fonctions entières et de celles qu'on peut y rattacher par des généralisations faciles [1], les cas où le théorème de Weierstrass ne s'appliquait pas restaient en dehors des recherches. C'est qu'en effet les méthodes ordinaires étaient en défaut dans ces cas, et l'on hésitait avant d'utiliser les méthodes basées uniquement sur la définition de la fonction analytique. Or, en y réfléchissant, c'était bien ainsi qu'il fallait raisonner. On verra dans ces *Leçons* comment on peut le faire; et l'on verra combien les théorèmes de la théorie des ensembles jouent dans cette étude un rôle important.

C'est aux fonctions uniformes que s'appliquent les considérations et les résultats précédents. L'étude des fonctions multiformes est bien moins avancée. Laissons de côté la théorie des fonctions algébriques; constatons également que la plupart des résultats relatifs aux fonctions uniformes se retrouvent dans la théorie des fonctions à un nombre fini de branches, et arrivons à la fonction multiforme la plus générale, qui a une infinité de branches. Peut-on reculer indéfiniment devant l'étude de ces fonctions ?

Tout d'abord, la définition de Weierstrass, dans le cas général, donnera justement naissance à une fonction à une infinité de branches. Donc, si l'on veut étudier toutes les conséquences de la définition de Weierstrass, c'est au fond l'étude de telles fonctions qu'on entreprend. On peut donc penser que, si les recherches de cet ordre sont restées longtemps et sont encore assez rares, ce n'est pas parce qu'elles ne s'imposaient pas nécessairement à l'esprit : la raison en est dans leur difficulté d'une part; et de l'autre dans le défaut d'outils appropriés : l'état insuffisamment avancé de la théorie des ensembles pouvait, par exemple, arrêter les chercheurs.

En second lieu, si ces recherches ont pu longtemps, en dehors de leur intérêt intrinsèque, être considérées comme sans objet, je veux dire sans application, il n'en est plus de même aujourd'hui. La définition de catégories étendues de fonctions par un procédé analytique déterminé donne invariablement naissance, en général,

[1] *Voir* MAILLET. *Mémoire sur les fonctions quasi-entières* (*Journal de Mathématiques*, 1892)

à des fonctions multiformes; et ne serait-ce que pour rechercher les conditions auxquelles les fonctions définies par un tel procédé sont uniformes, l'étude des propriétés des fonctions multiformes serait encore indispensable. C'est évidemment à la théorie analytique des équations différentielles que je pense en ce moment et aux travaux de M. Painlevé, bien que dans d'autres circonstances les considérations précédentes trouveraient à s'appliquer. La Thèse de M. Painlevé et ses travaux ultérieurs sont justement les premières tentatives faites pour éclaircir un peu cette notion complexe de fonction analytique de Weierstrass.

L'étude des fonctions multiformes doit donc, pour les raisons que je viens de dire, être abordée de plus en plus; et d'ailleurs, depuis un petit nombre d'années, les recherches tendent à se multiplier. Elles tendent même à s'orienter dans différentes directions, ce qui indique bien qu'elles sont à l'ordre du jour.

La plus grande partie de ces *Leçons* est consacrée à l'étude de la définition de Weierstrass. Je n'ai pas cherché à la simplifier, mais, au contraire, j'ai tenu à bien montrer toute la complication des cas qui peuvent se présenter. C'est justement la caractéristique des recherches de ce genre; la complexité des cas à prévoir est leur plus grande difficulté.

Une partie de l'Ouvrage est consacrée aussi à l'étude de l'allure d'une fonction au voisinage d'un point singulier. Je me suis borné aux recherches qui, soit par leurs méthodes, soit par leurs résultats et leurs généralisations, se rattachent au même ordre d'idées, c'est-à-dire qui utilisent la définition générale de Weierstrass. Il se trouve justement que celles des questions que j'ai été amené ainsi à laisser de côté, ayant déjà été traitées dans d'autres Livres de la Collection, le lecteur se trouvera avoir un exposé complet [1].

Enfin, j'ai été obligé de m'étendre, même assez longuement, sur la théorie des ensembles; sans doute cette théorie est depuis une dizaine d'années devenue bien classique en France. Mais j'avais justement besoin d'un certain nombre de propriétés qui

---

[1] E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières; Leçons sur les fonctions méromorphes.* — O. Blumenthal, *Leçons sur les fonctions entières de genre infini.*

ne figurent pas parmi celles qu'on peut considérer comme classiques [1] et que j'ai par suite été obligé de reprendre.

On trouvera dans ce Livre plus de questions signalées que de questions résolues. On ne doit pas s'en étonner, le sujet étant presque neuf. J'ai surtout voulu indiquer l'état de la question, les différentes directions suivies jusqu'ici et les difficultés auxquelles on se heurte.

---

[1] Les Ouvrages d'Analyse élémentaire introduisent en général la notion d'ensemble : il en est ainsi, par exemple, des Traités de MM. C. Jordan et R. Baire, ainsi que de la deuxième édition de celui de M. Goursat. M. d'Adhémar, dans ses exercices d'Analyse (Paris, 1908), ne croit pas devoir suivre cet exemple et rappelle l'opinion de M. Poincaré sur le *cantorisme*. Cette opinion n'est sans doute pas aussi exclusive que M. d'Adhémar semble le croire.

CHAPITRE I.

LES ENSEMBLES DE POINTS.

L'étude des ensembles de points est l'application la plus intéressante et la plus importante qui ait été faite de la théorie des ensembles abstraits. Un grand nombre des théorèmes de cette théorie (mais non tous) s'appliquent à des ensembles de points d'un espace à n dimensions: mais on comprendra qu'ayant en vue l'étude des fonctions d'une variable complexe, nous cherchions à abréger le langage en étudiant principalement le cas de l'espace à deux dimensions.

La notion fondamentale à introduire est celle de point limite. Un point a est dit *point limite* de l'ensemble E si, dans un cercle quelconque de centre a, il existe toujours un point de E (autre que a lui-même si a appartient à E) (¹). On peut alors énoncer le théorème suivant ou principe de Bolzano-Weierstrass :

Tout ensemble qui comprend une infinité de points admet au moins un point limite, ou encore : *Tout ensemble qui dans une aire comprend une infinité de points admet au moins un point limite dans cette aire.*

Ces théorèmes bien classiques se démontrent sans peine par la méthode habituelle de décomposition du plan en petits carrés.

Réciproquement, considérons un ensemble ayant un seul point limite (le point à l'infini si l'on veut) : cet ensemble est dénombrable; car, si l'on trace une série dénombrable de cercles concentriques de rayons indéfiniment croissants, dans chacune

(¹) Je n'exclus pas le cas où a serait le point à l'infini. L'intérieur d'un cercle de centre a est alors l'extérieur d'un cercle quelconque. En ceci je ne suis pas l'usage qui est de faire jouer un rôle à part aux ensembles bornés.

des couronnes formées, il y aura un nombre fini de points de l'ensemble; on pourra donc en ranger tous les points dans un ordre déterminé, c'est-à-dire les numéroter.

La conclusion et le raisonnement sont les mêmes si le nombre des points limites est fini.

La considération de l'ensemble des points limites, ou ensemble *dérivé*, résulte naturellement de ce qui précède. Si l'ensemble dérivé est une portion de l'ensemble donné, celui-ci est dit *fermé;* il est dit *parfait* s'il est identique à son dérivé.

Si l'ensemble dérivé est infini, il admet, lui aussi, un dérivé (qu'il contient; en d'autres termes tout dérivé est fermé) et l'on conçoit qu'on puisse ainsi former indéfiniment les ensembles dérivés successifs d'un ensemble donné. Dès qu'un de ces dérivés comprend un nombre fini de points, l'ensemble primitif est dénombrable.

Pourra-t-il arriver qu'aucun des dérivés successifs ne se réduise à un nombre fini de points? Ce n'est pas douteux : si, par exemple, l'ensemble donné (ou son dérivé) est parfait, les dérivations successives donnent toujours le même ensemble. Je ne fais pas l'étude complète de ce cas, et me contente d'énoncer les résultats auxquels on est alors conduit. Si la dérivation ne donne jamais d'ensemble fini, il existe un ensemble qui est commun à tous les dérivés. Cet ensemble est parfait (1).

Les ensembles fermés.

La théorie des ensembles fermés donne lieu à un plus grand nombre de résultats précis que la théorie générale des ensembles; c'est à peu près exclusivement sur les ensembles fermés qu'ont porté les travaux de M. Cantor et de ses élèves; nous verrons d'ailleurs que c'est surtout de ces catégories d'ensembles qu'on a besoin dans les applications.

J'énonce d'abord sans démonstration le théorème dit de Cantor-Bendixson : *Tout ensemble fermé est la somme d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable.* Ce théorème a été démontré d'abord

(1) Pour les démonstrations, voir, à la fin du Chapitre, les références bibliographiques.

en invoquant les propriétés des nombres transfinis; ces dernières années, on est arrivé à s'affranchir de cette considération. L'utilité de ce théorème consiste pour notre objet actuel en ce que l'étude des ensembles fermés se ramène à celle des ensembles parfaits.

Ce théorème permet notamment d'élucider la question suivante : Quelle est la puissance d'un ensemble fermé? Ou bien l'ensemble est dénombrable, ou bien il est la somme d'un ensemble parfait non nul et d'un ensemble dénombrable. On cherchera d'abord la puissance d'un ensemble parfait; cette question a été traitée par M. Cantor; je reviendrai un peu plus loin sur sa démonstration. Pour l'instant je me borne à énoncer le résultat : tout ensemble parfait a la puissance du continu. Pour les ensembles fermés, il n'y a donc en somme que deux puissances possibles : celle du dénombrable et celle du continu. Il en est sans doute de même pour tous les ensembles de points. Au contraire, on sait que la théorie des ensembles abstraits introduit des puissances de plus en plus grandes; cette différence de résultats apporte naturellement une grande simplification à l'étude et aux applications des ensembles de points.

On peut indiquer un procédé simple de génération de tous les ensembles fermés. Considérons, par exemple, les ensembles à une dimension situés sur une droite donnée. Je dis qu'on peut obtenir tous les ensembles fermés situés sur cette droite en excluant ceux des points de la droite qui sont intérieurs (au sens restreint du mot) à l'un des intervalles au moins d'une infinité dénombrable d'intervalles. En effet, d'abord tout ensemble fermé, E, est susceptible de ce mode de génération, car, si un point de la droite n'appartient pas à E, il n'est pas limite de E; donc il est intérieur à un intervalle qui ne contient aucun point de E; on peut toujours supposer que les intervalles ainsi définis n'empiètent pas l'un sur l'autre (à moins de coïncider); ils forment donc une infinité dénombrable. Inversement, soit E l'ensemble restant sur une droite quand on a enlevé les points de la droite intérieurs à une suite dénombrable d'intervalles; cet ensemble est fermé : un de ses points limites, en effet, ne saurait être enlevé, sans quoi les points qui l'entourent à droite et à gauche le seraient aussi.

Le résultat est naturellement le même pour un ensemble parfait. Prenons par exemple, pour série des intervalles, relativement à

un ensemble fermé donné, les intervalles que M. Baire appelle *contigus à l'ensemble*, définis de la façon suivante : tout point qui n'appartient pas à l'ensemble se trouve, on le voit aisément, entre deux points déterminés de l'ensemble qui sont les plus voisins de lui à droite et à gauche : considérons l'intervalle qui sépare ces deux points, et l'ensemble (dénombrable) des intervalles ainsi formés. Il est facile de voir alors quelle différence il y a, au point de vue de cette génération, entre les ensembles fermés et parfaits : dans l'ensemble fermé non parfait il y a des points isolés. De tels points seront extrémités de deux intervalles à la fois. Au contraire, si l'ensemble est parfait, deux intervalles contigus n'auront jamais une extrémité commune. Les points de l'ensemble se répartiront en trois catégories : ceux qui sont extrémités droites d'un intervalle, ceux qui sont extrémités gauches, et ceux qui sont limites des précédents sans être eux-mêmes extrémités d'intervalles ; les deux premières catégories étant dénombrables, la troisième est la plus nombreuse.

Il est facile maintenant d'indiquer rapidement la démonstration de M. Cantor sur la puissance d'un ensemble parfait. On dit qu'un ensemble est *dense* dans un intervalle si, dans tout intervalle intérieur au premier, il possède des points. Si un ensemble fermé est dense dans un intervalle, il en épuise tous les points, car tout point de l'intervalle sera limite de points de l'ensemble et par conséquent lui appartiendra. On comprend donc que l'étude de la puissance d'un ensemble parfait ne soit nécessaire que si celui-ci n'est dense dans aucun intervalle. Si l'on démontre qu'un tel ensemble a la puissance du continu, la propriété s'étendra sans peine à tous les ensembles parfaits denses ou non et même à plusieurs dimensions par l'intermédiaire de la courbe de Peano (*voir* p. 20). Considérons donc un ensemble E parfait qui n'est dense sur aucune portion du segment 0 — 1 par exemple ; considérons la suite I de ses intervalles contigus. La méthode consiste à imaginer sur un autre segment 0 — 1 un ensemble H partout dense, non fermé, dénombrable (par exemple l'ensemble des points d'abscisses rationnelles) dont chaque point correspondra à un des intervalles I, et cela de façon que l'ordre de succession de deux intervalles sur le premier segment soit le même que celui des deux points correspondants de l'ensemble H sur le second. Quel que soit l'ensemble, il est bien facile

de satisfaire à ces conditions. On se trouve alors avoir établi une correspondance point par point entre les points de E d'une part, ceux du second segment $0 — 1$ d'autre part. Aux points de E extrémités d'un même intervalle I, on fera correspondre un même point, savoir, le point de H qui correspond à l'intervalle I; et à ceux des points de E qui sont limites d'intervalles (ou d'extrémités d'intervalles, ce qui revient au même) on fait correspondre le point limite des points de H qui correspondent à ces intervalles; on démontre, bien entendu (c'est là qu'intervient l'ordre de succession des points et des intervalles), que cette dernière correspondance est bien point par point, c'est-à-dire qu'à un point déterminé de E ne répond qu'un point limite de H, et de même que tout point du segment $0 — 1$ (qui est limite de H) correspond à un et un seul point de E. Donc E a bien la puissance du continu.

Pour illustrer cette démonstration, je vais en donner un exemple qui me servira un peu plus loin à la construction d'autres exemples intéressants. Prenons les intervalles I de la façon suivante : divisons le segment $0 — 1$ en trois parties et prenons pour premier intervalle I la partie du milieu, c'est-à-dire l'intervalle $\frac{1}{3} — \frac{2}{3}$. Opérons de la même façon sur chacun des intervalles $0 — \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3} — 1$; nous aurons les deux intervalles I : $\frac{1}{9} — \frac{2}{9}$ et $\frac{7}{9} — \frac{8}{9}$. Il reste alors quatre intervalles sur lesquels j'opère de même, et ainsi de suite. On voit aisément que, si l'on écrit l'abscisse d'un point dans le système de numération de base 3 (avec les seuls caractères 0, 1, 2), un point sera enlevé (c'est-à-dire intérieur à un intervalle I) si le chiffre 1 est employé pour écrire son abscisse, et il est conservé si l'on emploie exclusivement les caractères 0 et 2. Les points extrémités d'intervalles (par exemple $\frac{1}{3}$ qui s'écrit 0,1 ou $\frac{2}{3}$ qui s'écrit 0,2) jouissent des deux propriétés (car, par exemple, 0,1 peut s'écrire 0,0222 ... et 0,2 peut s'écrire 0,1222 ...); nous conviendrons que ces points sont conservés, et l'on pourra dire que les points conservés (ceux de l'ensemble E) sont ceux dont l'abscisse *peut* s'écrire exclusivement avec les caractères 0 et 2. Cet ensemble E est parfait et non dense.

Pour construire l'ensemble H, faisons correspondre à l'intervalle $\frac{1}{3} — \frac{2}{3}$ le point $\frac{1}{2}$; aux deux intervalles suivants respecti-

vement les points $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, et ainsi de suite. Il est aisé de voir alors qu'à tout point de E dont l'abscisse s'écrit 0, *abc* ... dans le système de base 3, correspond un point dont l'abscisse dans le système de base 2 s'écrit 0, $\alpha\beta\gamma$ ... chacun des chiffres de ce dernier nombre étant 0 si celui qui a le même rang est 0, et 1 si celui qui a le même rang est 2. Or, tout point du segment 0 — 1 se trouve ainsi correspondre à un point de E (ou à deux), car l'abscisse de tout point du segment 0 — 1 peut s'écrire dans le système binaire par une combinaison quelconque des caractères 0 et 1, et à cette combinaison correspond une combinaison des caractères 0 et 2, c'est-à-dire un point de E.

Poussons un peu plus loin l'étude de cette correspondance. A toute abscisse 0, *abc* ... d'un point du segment 0 — 1 de l'axe des x, faisons correspondre l'ordonnée définie de la façon suivante : si l'abscisse choisie est relative à un point de E, prenons l'ordonnée écrite dans le système binaire en changeant les 0 en 0 et les 2 en 1 dans l'abscisse écrite dans le système ternaire; si l'abscisse est relative à un point intérieur à un intervalle, portons en ordonnée l'abscisse du point de H correspondant. Nous avons défini ainsi une fonction de x dans l'intervalle 0 — 1. Cette fonction est constante dans chacun des intervalles I, et elle n'est jamais décroissante. La courbe représentative est formée d'une infinité dénombrable de segments horizontaux reliés entre eux par *des points*, le tout formant une courbe continue, car l'ordonnée est évidemment fonction continue de l'abscisse; une telle fonction s'appelle *fonction scalaire*.

Je reviens au théorème général concernant la génération des ensembles fermés. J'ai traité le cas d'une dimension, à cause des conséquences que je voulais en tirer, mais le théorème s'étend à un nombre quelconque de dimensions. Je développe encore, en vue des conséquences, le cas de deux dimensions.

Soit un ensemble fermé plan E; tout point qui ne lui appartient pas est centre d'un cercle qui ne contient aucun point de E : donnons à ce cercle son rayon maximum ρ, je dirai que ce cercle est tangent à E; une différence apparaît tout de suite avec le cas d'une dimension : ces cercles peuvent empiéter sans coïncider, et il n'est plus évident qu'on puisse s'arranger de façon à en obtenir une suite

dénombrable. On peut le voir de la façon suivante : d'abord nous pouvons supposer E borné : s'il ne l'est pas, ou bien il comprend tout le plan ou bien on lui fera correspondre par une transformation homographique un ensemble borné. Je commencerai donc par tracer un cercle C contenant E, et j'exclurai les points extérieurs à ce cercle. Donnons-nous une suite de nombres positifs tendant vers zéro : $r_1, r_2, \ldots,$ et considérons ceux des points pour lesquels le nombre ρ défini plus haut est supérieur à r_1 ; on peut certainement enfermer tous ces points dans un nombre fini de cercles de rayons supérieurs à r_1 : en effet, après avoir tracé le cercle ayant pour centre un de ces points et tangent à E, je prendrai le centre d'un second cercle extérieur au premier (ou sur sa circonférence), puis celui d'un troisième extérieur à chacun des deux premiers, et ainsi de suite. Au bout d'un nombre *fini* d'opérations, il ne restera plus dans C de points pour lesquels ρ est supérieur à r (en effet, à cause de la condition imposée aux centres, chacun ne peut être intérieur à plus de sept cercles ; l'aire intérieure à C ne peut donc être recouverte plus de sept fois).

J'appliquerai le même procédé aux points pour lesquels ρ est compris entre r_1 et r_2, et ainsi de suite. Je mettrai bien en évidence, en continuant ainsi, une suite dénombrable de cercles, et tout point extérieur à E finira par être intérieur à un de ces cercles, car r_n finit par devenir plus petit que la valeur de ρ relative à tout point donné d'avance.

Inversement, si nous considérons une suite dénombrable de cercles et si nous convenons d'exclure les points du plan intérieurs à l'un au moins d'entre eux, l'ensemble des points restant est fermé, car si un point est enlevé tous les points voisins le sont aussi.

Je rappellerai encore brièvement la notion d'*écart* de deux ensembles fermés. M. Jordan appelle *écart* de deux points x, y, x', y' l'expression

$$|x - x'| + |y - y'|.$$

L'avantage que cette expression présente sur celle de la *distance* $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ est que la première ne s'annule que si les points sont confondus, et cela *même dans le cas de points imaginaires*, tandis qu'il n'en est pas de même de la distance. Comme

dans ce qui suit je considérerai uniquement des points réels, l'inconvénient n'est pas le même : j'emploierai donc en général l'expression d'écart; mais on pourra toujours supposer qu'il s'agit soit d'écart (au sens de M. Jordan), soit de distance (soit de toute autre fonction positive continue de deux points qui ne s'annulle que lorsqu'ils sont confondus).

L'écart d'un point à un ensemble sera la limite inférieure des écarts de ce point aux divers points de l'ensemble. Si l'ensemble est fermé, on voit aisément qu'il existe un point de l'ensemble dont l'écart au point donné est justement cette limite inférieure; par exemple, la condition nécessaire et suffisante pour que le point appartienne à l'ensemble est que son écart à l'ensemble soit nul. L'écart d'un point est le rayon du cercle tangent à l'ensemble utilisé dans la précédente démonstration (en supposant que écart = distance).

Soient de même deux ensembles; considérons les écarts de leurs points deux à deux : cet ensemble de nombres admet une limite inférieure qui est l'écart des deux ensembles. S'ils sont tous deux fermés, il existe au moins deux points (un dans chaque ensemble) dont l'écart est cette limite inférieure. En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles fermés aient un point commun est que leur écart soit nul.

Je démontre encore la proposition suivante, qui nous sera utile : *Étant donné un ensemble fermé quelconque, on peut toujours trouver un ensemble dénombrable dont le dérivé soit l'ensemble donné.*

En effet, on peut enfermer les points de E dans un nombre fini de cercles de rayon r. Supposons E borné et intérieur à un cercle C de rayon R. Prenons un point arbitraire de E pour centre d'un cercle de rayon r. S'il y a encore des points de E extérieurs à ce cercle, prenons l'un de ces points pour centre d'un second cercle de rayon r, et ainsi de suite. Au bout d'un nombre fini d'opérations, nous aurons enfermé tous les points de E, car nos cercles de rayon r peuvent recouvrir au plus sept fois l'aire C [1].

---

[1] Dans l'espace à n dimensions, on ne peut plus faire tout à fait le même raisonnement. On remarquera qu'il existe un nombre fini de cercles de rayon r, car sans cela leurs centres auraient un point limite et, par suite, on pourrait trouver deux centres dont la distance serait inférieure à r. Dans l'espace à deux dimensions, une limite supérieure de ce nombre est $7\frac{R^2}{r^2}$.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les centres de ces cercles. Recommençons en donnant à r une succession de valeurs r_n tendant vers zéro. L'ensemble I des centres des cercles est dénombrable; il est formé de points de E; donc tout point limite de I appartient à E, et, inversement, tout point de E étant intérieur successivement à un cercle au moins de rayon r_n est limite de ces centres. Le dérivé de I est donc identique à E.

Les ensembles parfaits à deux dimensions.

Je laisse maintenant de côté l'étude des propriétés *générales* des ensembles fermés, et j'arrive à la distinction entre les différentes catégories d'ensembles fermés à deux dimensions. Pour écarter le cas d'un ensemble dénombrable, il suffit de se limiter aux ensembles parfaits.

Je dirai qu'un ensemble est *bien enchaîné* entre deux points s'il est possible de former une chaîne de points de l'ensemble ayant pour extrémités les deux points donnés et telle que la distance de deux points consécutifs soit inférieure à ε, cela, bien entendu, quel que soit ε.

Ceci posé, un ensemble parfait bien enchaîné s'appellera *ensemble continu* [1]; s'il existe un couple de deux points tel que l'ensemble soit mal enchaîné entre ces deux points, l'ensemble est discontinu.

Un ensemble bien enchaîné est dense en lui-même. Il suffit qu'il soit fermé pour qu'il soit parfait et, par suite, continu.

Par exemple, un segment de droite, un arc de cercle extrémités comprises, la circonférence d'un cercle sont des ensembles continus. Un segment de droite dont on supprime une extrémité n'est pas un continu; il est bien enchaîné, mais il n'est pas fermé, ni par suite parfait. L'ensemble formé de la circonférence d'un cercle et du centre n'est ni parfait ni bien enchaîné; l'ensemble formé de deux segments de droites sans point commun est parfait mais mal enchaîné.

La distinction précédente a été faite par M. Cantor en cherchant à éclaircir la notion de *continu*. Pour notre objet, ce n'est

---

(1) Je considérerai souvent comme continu un ensemble réduit à un point

pas cette notion qui est essentielle : dans les applications, tout ensemble qui, sans être continu, peut être décomposé en portions continues, joue à peu près le même rôle qu'un ensemble continu. La véritable distinction à faire entre les catégories d'ensembles parfaits réside dans la définition des ensembles *partout* discontinus. J'appelle ainsi un ensemble parfait qui est mal enchaîné entre deux quelconques de ses points; cet ensemble ne comprend donc aucune portion continue.

Qu'il existe de tels ensembles, cela n'est pas douteux : tous les ensembles parfaits non denses à une dimension dont nous avons parlé plus haut sont partout discontinus. Nous en trouverons d'autres plus loin.

Des définitions précédentes, il résulte immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que la somme de deux continus soit continue est qu'ils aient un point commun (ou que leur écart soit nul).

Réciproquement, si l'on décompose un ensemble continu E en deux ensembles fermés ayant un seul point commun, ces ensembles sont continus tous deux.

Étant fermés, il suffit, d'après la remarque faite plus haut, de démontrer que chacun est bien enchaîné. Soient F et G ces deux portions, m leur unique point commun; soient a et b deux points de F; essayons de former une chaîne de points de F allant de a à b et à chaînons inférieurs à ε. On peut former une telle chaîne avec des points de E; si, pour une infinité de valeurs de ε tendant vers zéro, ces points de E sont des points de F, la démonstration est achevée. Supposons au contraire que, quelque petit que soit ε, la chaîne comprenne toujours des points de F et des points de G. Alors, la chaîne commençant et finissant par des points de F, en se déplaçant sur elle à partir de a, on trouvera d'abord des points de F jusqu'à un dernier, F_1, immédiatement suivi d'un point de G, G_1. De même, en revenant de b vers a, on mettra en évidence un dernier point de F, F_2, suivi d'un point de G, G_2; entre G_1 et G_2 se trouvent des points de F et de G. L'ensemble des points F_1 admet un ensemble limite quand on donne à ε une suite dénombrable de valeurs tendant vers zéro. De même pour les ensembles G_1, F_2, G_2. Tout point limite de F_1 est limite de G_1, car la distance F_1, G_1 est inférieure

à ε. De même tout point limite de F_2 est limite de G_2. D'autre part, F et G sont fermés. Donc tout point limite de G_1 ou F_1, de G_2 ou F_2, est commun à F et G, c'est-à-dire se confond avec m. Donc F_1 et F_2 ont un seul point limite, le point m. Si donc on convient de supprimer dans la chaîne tous les sommets intermédiaires entre F_1 et F_2 et de joindre ces points par un segment de droite, la nouvelle chaîne est exclusivement formée de points de F, et ses chaînons peuvent être rendus tous inférieurs à un nombre donné quelconque. Donc F est bien enchaîné.

L'hypothèse qu'il y a un seul point commun est essentielle : ainsi l'ensemble des points $0 \leqq x \leqq 1$ peut se décomposer dans

$$F : 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}; \qquad \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad G : \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3};$$

F et G sont parfaits, F n'est pas continu, F et G ont deux points communs. De même, la restriction que F et G sont fermés est nécessaire : si l'on prend pour F l'ensemble des points d'abscisse commensurable, et pour G l'ensemble complémentaire, leur somme est continue et ils n'ont aucun point commun.

Considérons maintenant une infinité dénombrable d'ensembles *fermés* dans chacun desquels il n'existe aucune portion continue; je dis que *la somme de ces ensembles ne saurait renfermer* non plus *de portion continue.*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles donnés; S leur somme, supposons qu'elle renferme un continu C. Il y a sur C des points n'appartenant pas à E_1 ; soit a un de ces points; E_1 étant fermé, on peut tracer un cercle de centre a ne contenant aucun point de E_1. L'ensemble des points de C situés dans ce cercle comprend une portion continue C'. Il y a sur C' des points extérieurs à E_2, et l'on peut tracer un cercle contenant une portion continue de C', entièrement intérieur au précédent et ne contenant aucun point ni de E_1 ni de E_2, et ainsi de suite. Ces cercles ont pour limite un point qui appartient à C : or il ne peut appartenir à aucun des ensembles E, car il est intérieur à un cercle qui ne contient aucun point de $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$; il y a donc contradiction.

Ici encore l'hypothèse que les E sont fermés est essentielle, comme le montre l'exemple de l'ensemble des points d'abscisse commensurables et de son complémentaire : leur somme est continue et aucun d'eux ne l'est.

Les continus superficiels.

M. Cantor divise les continus en deux catégories. On dit qu'un point est *intérieur* à un ensemble fermé si l'on peut trouver un cercle entourant ce point dont tous les points appartiennent à l'ensemble. Si un point n'est pas intérieur, il est dit *frontière*. Ceci posé, les ensembles continus qui possèdent des points intérieurs sont dits *superficiels*; ceux dont tous les points sont *frontières* sont dits *linéaires* [1].

Tout continu superficiel comprend évidemment des aires; inversement, si un continu comprend une aire, il est superficiel. D'après un théorème de M. Cantor, on ne peut placer dans un plan qu'une infinité au plus dénombrable de continus superficiels (sans points communs; d'ailleurs, si deux continus ont un point commun, ils n'en font qu'un).

Si un continu superficiel ne comprend pas tout le plan, il admet des points frontières. En effet, sur toute ligne (droite par exemple) joignant un point de l'ensemble à un point extérieur, les points de l'ensemble forment un ensemble fermé, qui ne comprend pas tous les points de la droite; il existe donc des intervalles dont les points intérieurs n'appartiennent pas à l'ensemble, tandis que les extrémités lui appartiennent : ces points sont évidemment des points frontières.

On voit de plus que les points frontières forment un ensemble tel qu'on ne puisse passer d'une façon continue d'un point intérieur à un point extérieur sans rencontrer un point de l'ensemble frontière. Ce sont là les propriétés de la ligne au sens vulgaire du mot. Mais proposons-nous de préciser la nature de l'ensemble frontière. Nous allons voir qu'il est formé de continus linéaires.

Soit E l'ensemble donné, soit un point quelconque n'appartenant pas à E, envoyons ce point à l'infini par une transformation homographique; l'ensemble E est alors borné. Considérons tous les points qu'on peut atteindre en partant du point à l'infini,

---

[1] J'ai modifié cette définition dans le but de l'étendre à l'espace (voir *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 1505). La démonstration paraîtra dans les *Acta Mathematica*.

et en décrivant des courbes (analytiques, par exemple) quelconques sans jamais rencontrer de point de E ; soit F l'ensemble de tous ces points et de leurs points limites. Un point commun à F et à E ne peut être intérieur ni à l'un ni à l'autre des deux ensembles ; mais, parmi les points frontières de E, il en existe qui sont aussi frontières de F, et qui constituent l'intersection C de F et de E. Je dis que cette intersection est un continu linéaire.

Considérons en effet une subdivision du plan en petits carrés par des droites parallèles à deux directions rectangulaires ; considérons ceux de ces carrés qui contiennent à la fois des points de F et des points de E. Tous les points de C appartiennent à un de ces carrés ; leur ensemble forme un continu superficiel (il est évident qu'il forme *des* continus, et il est aisé de voir qu'il ne saurait y en avoir deux). Soit C_1 ce continu superficiel ; C est dans C_1. Donnons au côté du carré une suite dénombrable de valeurs tendant vers zéro. Nous obtenons une suite de continus $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dont chacun contient tous les suivants et contient C. Je démontrerai plus loin (page 25) en toute rigueur que l'ensemble limite de C_n est continu. Cet ensemble limite ne peut comprendre de point extérieur à C. Soit en effet, par exemple, a un point de F, soit δ son écart à E. Quand le côté du carré sera inférieur à $\frac{\delta\sqrt{2}}{2}$, le point a sera extérieur au continu C_n correspondant et aux suivants. D'autre part, l'ensemble limite contient C ; donc il se réduit à C. Donc C est continu. Évidemment C ne peut comprendre aucune aire.

En résumé, à tout point extérieur à E, on peut faire correspondre une aire (F). Deux de ces aires ne peuvent avoir un point commun sans coïncider ; il y en a donc une infinité au plus dénombrable, et la frontière totale de E se compose d'une infinité dénombrable de continus linéaires.

Démontrons encore le théorème suivant : *Si l'on fait la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés dont aucun ne contient d'aire, leur somme ne saurait non plus contenir d'aire.* Ce théorème est analogue à celui de la page 17 et se démontre de même. Soit S une portion superficielle de la somme des ensembles E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$; soit a un point de S extérieur à E_1 ; il existe un cercle de centre a extérieur à E_1. Dans ce cercle figurent des

points extérieurs à E_2, et, par suite, il existe un cercle intérieur au premier extérieur à E_1 et à E_2, etc. Ces cercles tendent vers un point m de S qui ne peut appartenir à aucun des E, d'où la contradiction.

Les continus linéaires.

Soit d'abord un ensemble continu à une seule dimension E, soient a et b deux points de l'ensemble, je dis que tous les points entre a et b appartiennent à E. Soit m un de ces points. Formons entre a et b une chaîne de points de E à chaînons inférieurs à ε, m sera entre deux sommets consécutifs c, d de la chaîne. Quand ε tend vers zéro (en prenant une suite dénombrable de valeurs), c ou d tendent vers m puisque $cm < \varepsilon$. Donc m, point limite de points de E, appartient à E.

Donc, sur la droite, la notion cantorienne de continu se confond avec la notion vulgaire que nous en avons. Par extension, j'appellerai *ligne cantorienne* un continu linéaire. On voit que cette définition correspond d'une manière *a priori* aussi satisfaisante que possible à la notion vulgaire de ligne.

Il existe une autre définition de la ligne continue, savoir, celle de M. Jordan : il appelle ainsi le lieu des points dont les coordonnées sont fonctions continues d'un paramètre. Et nous devons naturellement nous demander quel lien il y a entre les deux définitions, si elles sont aussi compréhensives l'une que l'autre, et aussi laquelle se présente le plus naturellement dans les applications.

D'abord, il n'y a certainement pas identité entre les objets définis. On sait que les courbes de M. Jordan peuvent remplir une aire; d'autre part, il est aisé de montrer que toute courbe de M. Jordan est un ensemble parfait bien enchaîné. La notion de courbe d'après M. Jordan comprend donc à la fois des continus linéaires et des continus superficiels.

Il existe d'autre part des lignes cantoriennes qui ne sont pas représentables par des fonctions continues. Si à la courbe

$$y = \sin\frac{1}{x} \qquad (-1 < x < +1)$$

on ajoute le segment $-1, +1$ de l'axe des y, on obtient un

ensemble continu de points; et il est manifeste que les coordonnées d'un point ne peuvent être fonctions continues d'un paramètre t que si l'on convient de faire correspondre à une certaine valeur de t tous les points du segment $-1, +1$, ce qui ne donne pas, sur ce segment, des fonctions continues.

D'ailleurs, les deux conceptions se rencontrent dans des applications pratiques : la notion de M. Jordan se prête facilement à l'étude des propriétés élémentaires (rectification, intégration, applications géométriques), mais la notion cantorienne se présente, elle aussi, d'une façon très naturelle, j'ajoute même indispensable dans un grand nombre de recherches générales sur la théorie des fonctions analytiques : la ligne cantorienne apparaît comme l'un des cas possibles de la distribution des points dans un plan; or, tous ces cas sont également importants dans une étude générale, aucun ne peut être écarté. On ne sera donc pas étonné de voir cette notion intervenir souvent dans la suite; dans la théorie analytique des équations différentielles, c'est aussi sous la forme d'ensembles continus que se présentent les lignes singulières des fonctions qu'elles définissent (¹).

Les ensembles discontinus.

C'est aussi par des considérations du même genre qu'on peut justifier l'étude des ensembles discontinus. Outre l'intérêt que pré-

---

(¹) J'ai étudié dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale*, 1909, les relations entre ces deux définitions. J'ai été amené ainsi à introduire la notion d'ensemble continu *irréductible* entre deux points, c'est-à-dire dont aucune portion continue ne comprend les deux points. Quoique j'aie exposé ces recherches dans mes Leçons du Collège de France, je n'ai pas cru devoir les reproduire ici, car je n'avais pas à les utiliser. On pourra consulter encore sur ces questions : L. ZORETTI, *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 1505, et t. 151, p. 201; et S. JANISZEWSKA, *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 606, et t. 151, p. 198, ainsi qu'un Mémoire de l'auteur qui paraîtra prochainement dans les *Acta*. M. Janiszewski doit également réunir ses recherches dans un Mémoire. Aussi bien dans les recherches d'Analyse qu'en Géométrie pure, la notion de continu irréductible semble devoir jouer un rôle important. C'est la première restriction à apporter à la définition de M. Cantor pour la rendre conforme à la notion vulgaire de ligne. Certains même, la jugeant encore trop large, exigent une restriction de plus.

sente en elle-même une telle étude, il faut bien dire qu'elle est à peu près indispensable dans de nombreuses recherches.

Je m'occupe uniquement des ensembles que j'ai appelés *partout discontinus*, c'est-à-dire mal enchaînés entre deux quelconques de leurs points; quant aux ensembles discontinus formés par la réunion d'ensembles continus sans point commun et d'ensembles partout discontinus, on peut dire qu'ils seront utilisables dans les applications dès que l'on connaîtra les propriétés des continus et des ensembles partout discontinus.

Soit a un point d'un ensemble partout discontinu E; je dis qu'on peut trouver un contour simple entourant a, ne contenant aucun point de E, et entièrement intérieur à un cercle quelconque de centre a. Soit en effet C un tel cercle. L'ensemble F des points de E extérieurs à C ou situés sur C est fermé. Pour chaque point de cet ensemble, il existe un nombre ε tel qu'on ne puisse construire une chaîne de points de E à chaînons plus petits que ε et allant de a à ce point. Ces nombres ε admettent une limite inférieure non nulle, comme on le voit aisément en tenant compte de ce que F est fermé et de ce que, si le nombre ε a une certaine valeur pour un point de F, il a la même valeur ou une valeur plus grande pour tous les points d'un cercle de rayon ε ayant le point donné pour centre. Appelons encore ε la limite inférieure trouvée. Si nous traçons les cercles de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ ayant pour centres tous les points de E, ces cercles forment une ou plusieurs aires, et celle de ces aires qui comprend a est entièrement intérieure à C. La frontière de cette aire est une ligne qui entoure a et qui ne passe pas par un point de E; c'est une ligne simple fermée, L.

Remarquons que, si λ est l'écart de L et de E, on peut, en traçant tous les cercles de rayon $\lambda' < \lambda$ qui ont pour centre un point de L, obtenir une *bande* entourant a et ne contenant aucun point de E; il en résulte qu'on peut modifier le choix de la ligne L d'une infinité de façons. Mais, et ceci montre que le théorème précédent qu'on pouvait être tenté de regarder comme évident exige une démonstration, il ne faudrait pas croire qu'on puisse choisir pour L un cercle. Il est en effet facile de former un exemple d'ensemble discontinu tel que tout cercle de centre a le rencontre en un point au moins.

Reprenons en effet l'ensemble parfait non dense E construit plus haut (p. 11). J'ai construit une fonction $f(x)$ continue, définie entre 0 et 1 à la fois pour les points de l'ensemble E et pour les points extérieurs à l'ensemble. Donnons à x uniquement les valeurs des abscisses des points de E; la fonction $y = f(x)$ prend quand même et au moins une fois chacune toutes les valeurs entre 0 et 1. Posons alors

$$r = f\left(\frac{\theta}{2\pi}\right),$$

$\frac{\theta}{2\pi}$ prenant toutes les valeurs précédemment indiquées; θ prend donc *des* valeurs entre 0 et 2π; construisons l'ensemble des points dont les coordonnées polaires sont θ et $r = f\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$. Ces points forment un ensemble discontinu. Tous les cercles ayant l'origine pour centre et un rayon quelconque intermédiaire entre 0 et 1 contiennent un ou même deux points de l'ensemble.

Cherchons dans le même ordre d'idées à étudier la projection d'un ensemble discontinu sur une droite. Cette projection peut être continue ou comprendre un ensemble continu. Reprenons, en effet, par exemple, la fonction $y = f(x)$ définie pour les points de l'ensemble E: construisons les points de coordonnées x, $y = f(x)$. Ils forment un ensemble discontinu F, qui se projette sur l'axe des y suivant le segment 0 — 1 tout entier. On peut encore dire que toutes les parallèles à l'axe des x à une distance de celui-ci inférieure à l'unité contiennent un point (ou deux) de l'ensemble.

Ce résultat peut être étendu beaucoup. Considérons par exemple toutes les droites passant par l'origine et faisant avec l'axe des y un angle commensurable avec 2π (ces droites interceptent sur un cercle de centre O un ensemble dénombrable partout dense). Opérons sur chacune de ces droites comme dans le dernier exemple sur l'axe des y, c'est-à-dire déduisons de l'ensemble F que nous venons de construire une infinité dénombrable d'ensembles analogues au moyen d'une infinité dénombrable de rotations: la somme de tous ces ensembles ne contient aucun continu, et cependant sa projection est continue sur une infinité dénombrable de droites. Toute droite qui passe à une distance de O inférieure à l'unité contient un point de l'ensemble, si elle fait avec l'axe des x un angle commensurable avec 2π.

Conservons toujours à la fonction f la même signification et remarquons que l'ensemble F : $y = f(x)$ contient le point $x = y = 1$. Construisons alors le nouvel ensemble P défini par

$$\theta - \frac{\pi}{4} = 2\pi f(r\sqrt{2} - 1).$$

Quand r prend certaines valeurs telles que $(r\sqrt{2} - 1)$ varie de 0 à 1, c'est-à-dire, d'une façon plus précise, quand r prend un ensemble parfait non dense de valeurs entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sqrt{2}$, $\theta - \frac{\pi}{4}$ épuise toutes les valeurs entre 0 et 2π. Notre ensemble P est donc parfait discontinu, il va du point $x = y = 0$ au point $x = y = 1$, et toute droite issue de l'origine le rencontre.

Construisons alors une infinité (non dénombrable) d'ensembles semblables à F en prenant pour couples de points homologues d'abord l'origine point double et, en second lieu, le point $x = y = 1$ avec tous les points de P successivement; considérons la somme de tous ces ensembles F; sur toute droite issue de l'origine cette somme se projette suivant un ensemble dont une portion est continue. L'ensemble est rencontré en un point par toutes les droites qui coupent le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

On peut évidemment recouvrir tout le plan au moyen d'une infinité dénombrable de cercles de rayon $\frac{1}{2}$. Effectuons sur l'ensemble précédent une infinité dénombrable de translations en faisant correspondre à l'origine successivement les centres de ces cercles. La somme des ensembles obtenus ne contient aucune portion continue. Et cependant, soit une droite *quelconque* D: elle contient certainement un point de l'ensemble. Elle en contient même une infinité, car tout point de la droite étant intérieur à un des cercles est à une distance inférieure à $2\sqrt{2}$ d'un point de l'ensemble situé sur D. Il y a donc des points de l'ensemble sur chaque segment de D supérieur à un nombre fixe $(4\sqrt{2})$ (1).

Ces exemples suffiront, je l'espère, à montrer avec quelle prudence il faut employer ces ensembles dans les applications, et combien il faut se méfier des suggestions de notre intuition.

---

(1) *Voir* L. ZORETTI, *Comptes rendus*, t. 142, 1906, p. 763; on trouvera un autre exemple dans une Note de A. DENJOY, *Comptes rendus*, t. 149, 1909, p. 726, parue pendant l'impression de ce Livre.

Ensembles fonctions d'un paramètre.

Dans un grand nombre de questions, on fait appel à un ensemble variable, dépendant d'un paramètre, et l'on utilise les propriétés de l'ensemble limite quand le paramètre tend vers une valeur déterminée. J'ai déjà fait dans ce qui précède des raisonnements de ce genre et je vais montrer comment on peut obtenir quelques résultats systématiques dont nous aurons besoin fréquemment; mais il convient de faire auparavant une remarque. L'ensemble limite est formé de points qui sont à un certain point de vue points limites des ensembles donnés, et il y a là une certaine confusion qui pourrait s'établir entre ces deux aspects de la notion de point limite. Pour l'éviter, il nous suffira de préciser nos définitions.

Soient E (α) les ensembles variables donnés, fonctions de α. Supposons que α tende vers β. Je dirai qu'un point a appartient à l'ensemble limite E, si dans un cercle quelconque de centre a il existe des points des ensembles E (α) pour une infinité de valeurs de α tendant vers β.

Il ne faudrait nullement en conclure que, si l'on prend une infinité d'ensembles E (α) et dans chacun un point, le dérivé de l'ensemble de points obtenu appartienne à l'ensemble limite. En effet, prendre une infinité d'ensembles E (α) ne veut pas dire que l'on donne à α une infinité de valeurs tendant vers β. Cependant le procédé dont je viens de parler pourrait être commode dans certaines applications; aussi n'est-il pas inutile de rechercher les cas où l'on peut procéder ainsi.

Supposons que α prenne uniquement des valeurs réelles (si α était complexe, il n'y aurait presque rien à changer); représentons α par un point d'abscisse α. Toutes les valeurs qu'on donne à α fournissent donc un ensemble de points à une dimension. Le point β est un point limite de cet ensemble; s'il y a d'autres points limites, on peut imaginer une infinité d'ensembles E(α) sans que α tende vers β, sinon non. La condition pour qu'on puisse procéder comme je l'ai dit est donc que l'ensemble α ait un seul point limite, savoir β (il doit donc, en particulier, être dénombrable). Ce cas se présente heureusement assez souvent, et cela se conçoit, car

c'est en général nous-mêmes qui choisirons les ensembles variables. Il est facile de voir que, dans ce cas, on pourra obtenir *tout* l'ensemble limite en prenant de toutes les façons possibles un point et un seul dans chaque ensemble. Si l'on se reporte aux démonstrations où nous avons déjà, plus haut, utilisé les ensembles variables, on verra que nous avions, sans le dire, utilisé ce procédé.

Revenons au cas général, et remarquons d'abord que tout point commun à tous les $E(\alpha)$ appartient à l'ensemble limite. Soit maintenant a un point quelconque de l'ensemble limite. Quand α tend vers β, deux cas peuvent se présenter : ou bien pour *toutes* les valeurs de α voisines de β, il y aura des points de $E(\alpha)$ voisins de a; ou bien pour certaines valeurs de α voisines de β, il y aura de tels points, tandis que pour d'autres les $E(\alpha)$ seront à distance non infiniment petite de a. L'ensemble limite n'est donc pas le même suivant que α prend toutes les valeurs voisines de β ou seulement quelques-unes d'entre elles.

Je remarque encore que l'ensemble limite est fermé.

Je démontrerai simplement le théorème suivant qui nous sera très utile : *Considérons un continu fonction d'un paramètre et cherchons à quelle condition l'ensemble limite sera continu. Je dis qu'il suffit pour cela que l'ensemble limite contienne un point au moins qui soit limite de* TOUS *les* $E(\alpha)$.

En effet, écartons le cas où l'ensemble limite contiendrait uniquement ce point (auquel cas il serait bien continu) et supposons que l'ensemble limite contienne deux points au moins a, b, a étant voisin de tous les $E(\alpha)$ tandis que b peut n'être voisin que de quelques-uns (en nombre infini). Je vais démontrer que l'ensemble limite E est bien enchaîné entre a et b. Supposons qu'il ne le soit pas; on pourra trouver un nombre ε tel, qu'en traçant les cercles de rayon ε ayant pour centres les points de E, ces cercles forment des surfaces séparées, a et b n'appartenant pas à la même surface. (Ces surfaces sont en nombre fini en supposant E borné puisqu'elles ne se recouvrent pas et que chacune a au moins $\pi\varepsilon^2$ pour aire.) Alors, on peut trouver une infinité de valeurs de α tendant vers β telles que $E(\alpha)$ ait des points dans l'aire qui entoure a et des points aussi dans celle qui entoure b; comme $E(\alpha)$ est continu, $E(\alpha)$ aura aussi des points extérieurs à toutes les aires. L'ensemble limite

aurait donc aussi des points en dehors de ces aires ou sur leur frontière, ce qui est absurde.

Il est alors évident que E est bien enchaîné entre deux quelconques de ses points : pour faire une chaîne allant de b à c, on ajoutera deux chaînes allant de b à a et de a à c, ce qui est possible d'après ce qui précède avec des chaînons aussi petits qu'on veut. Alors E étant fermé et bien enchaîné est parfait.

L'existence d'un point limite pour tous les E_n, c'est-à-dire tel que dans un cercle de centre a il y ait des points de tous les E_n à partir d'une certaine valeur de n, semble bien être presque essentielle pour que l'on puisse énoncer un théorème général.

On peut cependant se demander si, lorsqu'un ensemble continu E_n a pour limite un continu, il existe forcément un point qui soit limite pour *tous* les E_n. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant :

Prenons pour ensemble E_n l'ensemble des points de coordonnées x, y définies par les égalités ou inégalités suivantes :

$$y = \frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{2}{3n},$$

$$y = \frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{n} + \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{3n},$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y = \frac{1}{n}, \qquad \frac{p}{n} + \frac{1}{3n} \leq x \leq \frac{p}{n} + \frac{2}{3n} \qquad (p \leq n-1).$$

En d'autres termes, sur chaque droite d'ordonnée $\frac{1}{n}$ nous divisons le segment 0 — 1 en n parties égales et nous prenons pour former un ensemble E_n le tiers moyen de chaque segment. Sur chaque droite, nous aurons n ensembles E_n, tous continus. L'ensemble limite est le segment 0 — 1 de l'axe des x, et il n'y a aucun point sur Ox qui soit limite de tous les E_n. On peut même choisir les E_n de façon que l'ensemble limite ne soit plus continu.

On peut donc se proposer de caractériser les cas où l'on peut affirmer l'existence de points limites par tous les E_n, et notamment les cas où l'ensemble des points limites de tous les E_n est continu lui-même. On peut se demander aussi si l'on peut prendre parmi les E_n un ensemble (dénombrable) d'ensembles (c'est-à-dire une infinité de valeurs de n) de telle façon que l'ensemble limite reste

continu et que ses points soient limites pour *tous* les nouveaux E_n. J'ai traité la question dans une Note [1] et j'ai montré que le choix précédent est toujours possible dès qu'il existe *un* point a limite pour tous les E_n.

Je me borne à le montrer dans le cas particulier très simple où l'ensemble limite E (qui est continu) est ce que j'appelle un continu *irréductible* entre deux points a et b, c'est-à-dire un ensemble tel qu'on ne puisse pas en extraire une *portion* continue contenant a et b. Prenons en effet ceux des ensembles E_n qui ont b pour limite; il est facile de les déterminer (et même d'une infinité de façons). Leur ensemble limite sera un *continu* contenant a et b, c'est-à-dire sera E lui-même. De plus, tout point de E est limite pour tous les nouveaux E_n, car, si l'on pouvait trouver une infinité de valeurs de n indéfiniment croissantes telles que les E_n correspondants s'écartent du point c, ces E_n auraient un ensemble limite continu ne contenant pas c et contenant a et b. Il y aurait donc une *portion* de E continue contenant a et b, ce qui est contraire à l'hypothèse [2].

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, 1909.

(2) Le lecteur que la théorie des ensembles intéresse pourra se mettre au courant des différents résultats qui la constituent en lisant les *Leçons sur la théorie des fonctions*, de M. E. Borel, les deux *Berichte* de M. A. Schœnflies, l'article de MM. Schœnflies et Baire de l'*Encyclopédie J. Molk* et l'article de L. Zoretti de la même *Encyclopédie*, première Partie de l'article original intitulé : *Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions de variables réelles*, ainsi que l'article *Sur la notion de ligne*, du même auteur, dans la même Encyclopédie.

CHAPITRE II.

LA NOTION DE FONCTION ANALYTIQUE.

La notion de prolongement analytique est aujourd'hui bien classique; aussi vais-je la reprendre d'une façon très rapide.

Considérons une série de Taylor

$$(1) \qquad \varphi(z-a) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

convergente dans le cercle C

$$|z-a| < r;$$

cette série définit dans ce cercle une fonction de z qui est continue et admet une dérivée. Nous dirons que c'est un élément de fonction analytique, et cette fonction pourrait être définie en dehors du cercle de convergence de la série (1) d'une infinité de façons; on pourrait, par exemple, convenir que la fonction qui dans le cercle est égale à la somme de la série (1) est nulle à l'extérieur du cercle. Mais, parmi cette infinité de façons, nous allons, avec Weierstrass, choisir la suivante.

Considérons une seconde série de Taylor

$$(2) \qquad \psi(z-b) = b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + \ldots$$

convergente dans un cercle C′

$$|z-b| < r'.$$

Supposons que les deux cercles C, C′ aient une partie commune et que, dans cette partie, les deux séries aient constamment la même somme. Nous dirons que la seconde série est le *prolongement analytique* de la première.

Il est clair que ces conditions ne sont pas très restrictives et peuvent être vérifiées. Si l'on prend par exemple un point b

intérieur à C, la fonction qui dans le cercle C est représentée par $P(z-a)$ est développable dans un certain cercle de centre b suivant une série de puissances de $z-b$. Si le nouveau cercle de convergence n'est pas entièrement intérieur au premier (ce qui est le cas général), nous avons un exemple où les conditions précédentes sont réalisées.

Considérons donc une suite dénombrable de nombres complexes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tels, que la série (1) ait un rayon de convergence non nul; formons tous les prolongements analytiques de cette série, puis les prolongements analytiques des nouvelles séries. Chacune des séries de Taylor obtenues constitue un élément de fonction analytique, et la fonction analytique tout entière est constituée par l'ensemble de tous ces éléments.

On devine ce que pourra signifier l'expression : prolonger la fonction suivant un chemin déterminé.

Cette définition, surtout ainsi présentée, paraît extrêmement compliquée, et il semble difficile d'en tirer parti pour la démonstration de propriétés générales. Cependant, à la réflexion, on se trouve conduit à se poser certaines questions dont la solution ne paraît pas inabordable, et projettera une certaine clarté sur la définition. La première est certainement la suivante : une série de Taylor a évidemment une infinité non dénombrable de prolongements analytiques; d'autre part, il en est qui sont inutiles pour la définition de la fonction : tous ceux par exemple qui ne permettent pas de sortir du cercle initial peuvent être remplacés par un seul, savoir l'élément donné; nous devrons donc nous demander quel est le nombre *minimum* d'éléments qu'il suffit de considérer pour représenter toute la fonction. La réponse est fournie par le théorème de MM. Poincaré et Volterra (1) : il suffit de considérer une infinité *dénombrable* d'éléments pour avoir la valeur de la fonction en tous les points que le prolongement analytique permet d'atteindre. L'ensemble de tous ces points constitue *le domaine d'existence* de la fonction.

Arrivons maintenant à la définition des points singuliers de la fonction. Considérons un élément quelconque de la fonction, $P(z-a)$

---

(1) *Rendiconti di Palermo*, t. II, 1888. *Voir*, pour la démonstration, E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*.

convergent dans le cercle C (et pas dans un cercle plus grand). Prenons un point quelconque b sur la circonférence de C; ou bien il existe une série ordonnée suivant les puissances de $z-b$, prolongement analytique de la première, ou bien il n'en existe aucune; dans le second cas, le point b est un point singulier.

Il est facile de voir que sur le cercle C il y a au moins un point singulier. En effet, dans l'hypothèse contraire, la limite inférieure des rayons de convergence sur la circonférence ne pourrait pas être nulle, et l'on en déduirait que l'élément initial converge dans un cercle de rayon supérieur à celui de C, ce qu'on ne supposait pas.

Si l'on opère pour *tous* les éléments de la fonction analytique comme il vient d'être indiqué, si l'on ajoute aux points singuliers ainsi obtenus l'ensemble des points qu'on ne peut atteindre par prolongement analytique qui sont aussi des points singuliers, on obtient l'ensemble singulier de la fonction.

La définition précédente des points singuliers n'est pas celle qu'on utilise d'ordinaire dans les raisonnements: elle est, de plus, assez vague, et la première des choses que nous allons faire consiste justement à donner de ces points une définition plus précise. Mais il ne faudrait pas croire que ce soit là chose très simple, et, pour bien mettre en évidence les difficultés qui se présentent, nous allons être obligés de faire un certain nombre de remarques générales sur la définition des fonctions analytiques. Il est bien entendu que provisoirement nous appellerons *points singuliers* les points définis ci-dessus, et on ne va pas tarder à s'apercevoir que la définition précédente qui pouvait *a priori* sembler acceptable est tout à fait insuffisante et incomplète.

Toute la difficulté de la théorie générale des fonctions analytiques résulte de la propriété que je vais déduire des remarques fondamentales suivantes.

Soit b un point régulier de la fonction. On pourra en général l'atteindre en partant de a d'une infinité de façons en partant d'un même élément. Il n'y a aucune raison pour que la valeur de la fonction au point d'arrivée soit toujours la même quel que soit le chemin suivi. Voici une autre façon de se rendre compte du même fait. Supposons deux éléments de la fonction convergents dans deux cercles qui ont une partie commune; ces deux éléments dérivent d'un même élément soit directement, soit par l'intermédiaire de deux files de cercles. Il n'y a aucune raison pour que ces

éléments *se prolongent*, c'est-à-dire pour que les deux séries aient la même valeur dans la partie commune aux deux cercles. D'où deux grandes classes de fonctions analytiques.

Ou bien la valeur de la fonction en chacun des points de son domaine d'existence sera toujours la même quel que soit le chemin suivi pour atteindre ce point; en d'autres termes, la fonction n'aura qu'une valeur en chaque point; on dira qu'elle est *uniforme*. Ou bien il existe au moins un point pour lequel la fonction n'a pas la même valeur suivant le chemin qui aboutit en ce point; elle est *multiforme*. Ce dernier cas se subdivise encore en deux : ou bien le nombre des valeurs de la fonction en chaque point est *borné*, ou bien il ne l'est pas.

C'est ce dernier cas qui est le plus général. En chaque point une fonction admet en général une infinité de *branches* (cette infinité est dénombrable, car chaque valeur *exige* un élément de fonction et une infinité dénombrable d'éléments *suffit* à représenter la fonction). Au contraire, le cas de la fonction uniforme est très particulier; mais on devine que c'est aussi le plus important en pratique, parce qu'il permet d'obtenir un plus grand nombre de propriétés.

C'est surtout par la distinction des points singuliers dans les deux cas que se manifeste la différence entre les fonctions uniformes et multiformes. Considérons un point a régulier pour une fonction multiforme $f(z)$; prolongeons analytiquement $f(z)$ le long d'un chemin quelconque partant de a et y revenant. Il peut très bien arriver que le point a soit singulier pour l'une des branches de fonction obtenue, c'est-à-dire que le prolongement analytique effectué le long d'une certaine courbe permette d'atteindre le point a, mais pas de le dépasser; en d'autres termes, a sera singulier pour certaines branches et pas pour d'autres. Il ne faudrait pas croire, bien entendu, que ce soit là un fait accidentel; il faut au contraire le considérer comme se produisant d'une façon générale pour une fonction multiforme prise au hasard. La simplicité de l'exemple suivant le montre bien.

Considérons la fonction

$$y = \log \log z.$$

Les points singuliers sont $z = 0$, $z = \infty$ et la valeur de z pour lesquelles $\log z$ est nul, c'est-à-dire $z = 1$. Donnons à z une valeur z_0;

choisissons une des branches de $\log z_0$ et une des branches de $\log\log z_0$; la branche choisie est analytique ; prolongeons-la jusqu'au point $z = 1$ (suivant un chemin quelconque) ; la fonction $\log z$ prendra l'une des valeurs de $\log 1$, c'est-à-dire $2ni\pi$. Si n est différent de zéro, le logarithme de $\log z$ reste développable en série suivant les puissances de $z - 1$, y est régulière. Donc, une seulement des valeurs de $\log z$ donnera une infinité de branches de y admettant $z = 1$ pour point singulier; les autres branches sont régulières en ce point.

Une objection se présente : sont-ce là les branches d'une même fonction analytique, c'est-à-dire peut-on passer de l'une à l'autre par prolongement analytique? Cela n'est pas douteux. Par des lacets issus de z_0 et tournant autour de $z = 0$ (sans tourner autour de $z = 1$), on échangera entre elles deux branches quelconques de $\log z$ sans que leurs logarithmes cessent jamais d'être réguliers. Posons de même $\log z = u$; on a donc $y = \log u$ et $z = e^u$. On peut toujours faire décrire à u dans son plan un chemin qui échange deux quelconques des branches de $\log u$; quand u décrit ce chemin, z en décrit un autre, et inversement, z décrivant ce second chemin, on pourra (par un choix convenable de la détermination initiale de u) échanger les deux valeurs de y données.

On verra tout aussi simplement, en considérant la fonction

$$y = \log\log f(z),$$

dont les points singuliers sont les points pour lesquels $f(z)$ est égale à 0, à l'infini, ou à 1, que ces derniers points (qui peuvent être en nombre infini) sont singuliers pour un certain nombre seulement de branches de y, tandis que les points pour lesquels $f(z)$ est nulle ou infinie sont singuliers pour toutes les branches.

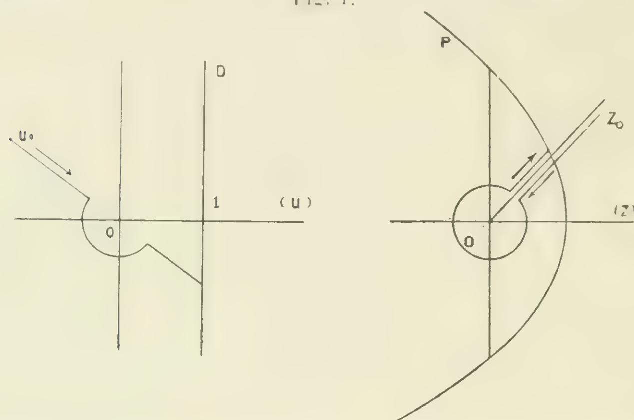
Voici d'autres conséquences du même fait qui vont nous montrer la possibilité d'une autre particularité des fonctions multiformes. Il s'agit de fonctions qui ont un nombre de branches variable avec le point qu'on choisit; il suffit de supposer pour cela que le long de toute une ligne la singularité précédente a lieu : tous les points de la ligne sont singuliers pour certaines branches et pas pour d'autres, en sorte que les dernières seules peuvent être prolongées au delà de la ligne.

Pour en donner un exemple, soit $y = g(u)$ une fonction uni-

forme admettant une ligne singulière, par exemple, une droite D (*fig.* 1) parallèle à l'axe complexe dans le plan des u, la droite $u = 1 + i\lambda$ (λ réel) pour préciser, et supposons $g(u)$ définie à gauche de cette droite.

Considérons la fonction $y = g(\sqrt{z}) = f(z)$, qu'on définira par prolongement analytique à partir d'une valeur initiale quel-

Fig. 1.



conque. Quand le point u décrit la droite D, il est facile de voir que le point

$$z = u^2 = 1 - \lambda^2 + 2i\lambda$$

décrit la parabole P

$$\begin{aligned} X &= 1 - \lambda^2 \\ Y &= 2\lambda \end{aligned} \qquad (z = X + iY).$$

A une valeur de z répondent deux valeurs de u symétriques. L'une de ces valeurs, au moins, est dans la portion du plan des u où g est définie, et l'on voit sans peine que, suivant que z est extérieur ou intérieur à P, l'un seulement des deux points u ou les deux se trouvent dans cette région. Donc la fonction $y(z)$ a deux branches quand z est intérieur à P et une seule quand z est extérieur à P. La coupure P est coupure pour une seule branche. Quand z tend vers un point de P, $\sqrt{z}$ tend soit vers un point de D (qui est singulier), soit vers un point de la droite symétrique par rapport à l'origine, (qui est régulier), et dans ce dernier cas, on ne rencontre aucun obstacle au prolongement analytique de la branche que l'on poursuit, tandis que dans le premier cas on était arrêté. Les

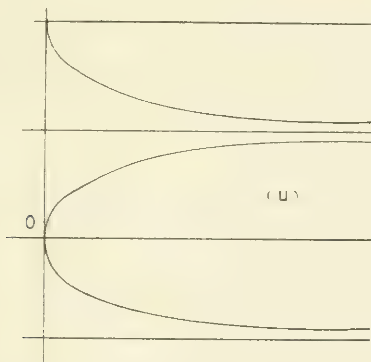
deux branches de la racine carrée se permutant autour du point critique $z = 0$, il s'agit, bien entendu, du prolongement analytique de la même fonction. On voit sur la figure (*fig.* 1), où les chemins marqués de flèches se correspondent, comment se fait l'échange des branches.

Soit encore une fonction uniforme que nous allons préciser dans un instant, $g(u)$; posons $u = \log z$. Quand z décrit la droite D : $z = 1 + i\lambda$, u est donné par

$$u = \log z = \frac{1}{2}\log(1 + \lambda^2) + i \operatorname{arc\,tang} \lambda + 2ik\pi.$$

Il y a donc une infinité de points u qui décrivent des courbes toutes égales (*fig.* 2) s'étendant à l'infini. Soit C l'une de ces courbes.

Fig. 2.



Construisons la fonction uniforme $g(u)$ de telle sorte qu'elle admette cette courbe pour coupure et qu'elle soit définie à l'extérieur de cette coupure. Nous verrons plus loin (p. 44) que cette fonction peut être construite. Nous pouvons alors définir par prolongement analytique la fonction

$$f(z) = g(\log z).$$

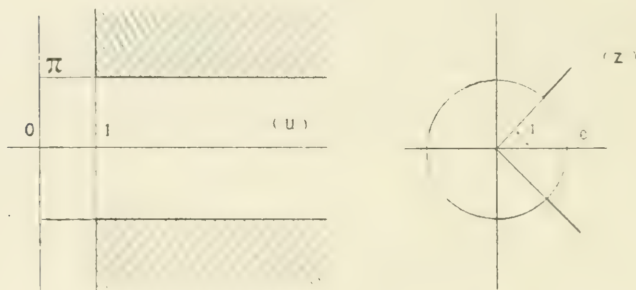
Supposons que z se déplace dans son plan et vienne en un point de D. Suivant la branche de logarithme dont on s'occupe, $u = \log z$ tendra vers un point de C ou vers un point d'une des autres courbes égales à C. Dans ce dernier cas, le prolongement analytique au delà de D est possible. Donc une seule branche de $g(\log z)$ a D pour coupure. Ici encore toutes les branches du logarithme peuvent s'échanger entre elles, car les points voisins

de $z = 0$ donnent des points u à partie réelle très grande et négative, c'est-à-dire situés dans le domaine d'existence de $g(u)$.

En prenant au contraire pour $g(u)$ une fonction ayant pour coupure l'ensemble des courbes C *sauf une*, on aura une fonction qui admet une branche à droite de D (uniforme) et une infinité à gauche. Voici des exemples plus simples de cette dernière circonstance.

Formons une fonction uniforme $g(u)$ (ce qui est possible, nous

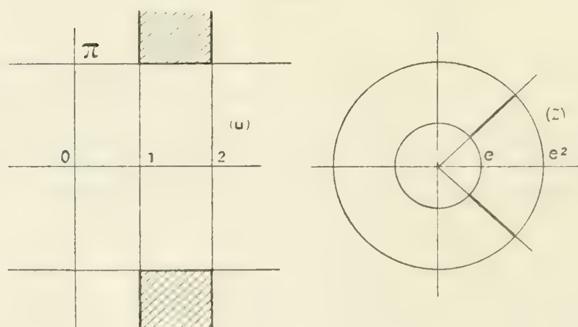
Fig. 3.



le verrons) admettant pour coupure soit (*fig.* 3) l'ensemble C,

$$u = 1 + bi, \qquad |b| > \pi,$$
$$u = a \pm \pi i, \qquad a > 1,$$

Fig. 4.



soit (*fig.* 4) l'ensemble C_1,

$$u = 1 + bi, \quad u = 2 + bi, \qquad |b| > \pi,$$
$$u = a \pm \pi i, \qquad 1 < a < 2.$$

et définie à l'origine, et considérons la fonction

$$g(\log z) = f(z).$$

Quand u décrit C, $z = e^u$ décrit le cercle de rayon e et deux demi-droites d'argument 1. De même, quand u décrit C_1, z décrit deux cercles de rayons e et e^2 et deux segments de droite. Examinons par exemple ce dernier cas. Quand z est situé dans la couronne, la partie réelle de $\log z$ est comprise entre 1 et 2, une seule des branches du logarithme se trouve dans le domaine d'existence de $g(u)$; la fonction $f(z)$ est donc uniforme dans la couronne. En dehors de la couronne, elle a au contraire une infinité de branches. Les cercles $|z| = e$ ou e^2 sont coupures pour toutes les branches sauf une; les segments : $\arg z = \pm 1$ sont coupures pour la branche unique définie dans la couronne.

Reste à montrer que ce sont toutes les branches d'une même fonction analytique; cela résulte de ce que le point critique $z = 0$ donne des valeurs de u pour lesquelles $g(u)$ est définie.

L'ensemble singulier.

Revenons maintenant aux généralités. Je dis que l'ensemble singulier d'une fonction uniforme est *fermé*, ce qui est une restriction très importante. En effet, un point régulier est centre d'un cercle où la fonction est holomorphe; donc il ne peut pas être limite de points singuliers.

Le même raisonnement s'applique-t-il à une fonction multiforme? Évidemment non. En reprenant la démonstration précédente, nous pourrons dire tout au plus qu'un point régulier *pour une branche* donne naissance à un cercle où cette branche est holomorphe; mais les autres branches peuvent *a priori* admettre des points singuliers tendant vers le point donné.

Supposons cependant que la fonction admette au point donné un nombre *fini* de branches. Alors, chacune de ces branches étant holomorphe dans un certain cercle, le plus petit de ces cercles ne contient aucun point singulier et le théorème est encore exact.

Mais supposons qu'il y ait au contraire une infinité de branches, toutes régulières au point $z = a$; chacune est holomorphe dans un

cercle de centre a, et sur la circonférence de chacun de ces cercles il y a un point singulier. Donc, pour que le point régulier a soit limite de points singuliers, *il faut et il suffit que la limite inférieure des rayons d'holomorphie des différentes branches soit nulle.*

Il est bien manifeste que ce cas doit pouvoir se présenter. Je vais en tous cas le montrer par des exemples.

Considérons une série dénombrable de points $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ ayant pour point limite un point ζ. Posons

$$z_n = r_n e^{i\theta_n},$$

θ_n désignant l'argument compris entre o et 2π de z_n, et choisissons parmi les déterminations de $\log z_n$ la suivante,

$$\log r_n + i\theta_n + 2ni\pi,$$

le multiplicateur de $2i\pi$ étant l'indice n de z_n. Appelons u_n ce point et considérons dans le plan des u l'ensemble des points u_n. Ces points sont isolés et leur seul point limite est le point à l'infini, car, pour associer une infinité de points u, on est obligé de prendre une infinité de valeurs de n et, par suite, de faire croître indéfiniment le coefficient de i. Nous pouvons donc former une fonction uniforme $g(u)$ ayant pour seuls points singuliers ces points u (par exemple une fonction méromorphe ayant les u_n pour pôles). Considérons alors la fonction

$$f(z) = g(\log z).$$

Ses points singuliers sont, outre ceux du logarithme, les points tels que $\log z = u_n$, c'est-à-dire les points z_n : tous ces points sont effectivement singuliers pour une branche de $f(z)$. Je dis maintenant que le point ζ est régulier pour toutes les branches de $f(\zeta)$. Prenons en effet une détermination quelconque de $\log\zeta$; il lui correspond un point du plan des u qui n'est ni point limite des u_n ni confondu avec l'un d'eux; il est donc régulier pour $g(u)$. Le point ζ est un point régulier limite de points singuliers.

C'est pour simplifier que nous avons supposé que les z_n avaient un seul point limite ζ : la conclusion s'applique à n'importe lequel de leurs points limites qui n'est pas en même temps un point z_n.

Prenons par exemple pour z_n l'ensemble des points du plan à coordonnées rationnelles. Cet ensemble est dénombrable et dense

dans tout le plan. Posons encore

$$z_n = r_n e^{i\theta_n} \qquad 0 \leq \theta_n < 2\pi,$$
$$u_n = \log r_n - i\theta_n - 2ni\pi;$$

l'ensemble u est isolé et a un seul point limite, savoir le point à l'infini. Considérons encore la fonction $g(u)$ qui a les points u_n pour points singuliers, et posons

$$f(z) = g(\log z).$$

Cette fonction admet un ensemble de points singuliers dense dans tout le plan, et elle est régulière en tous les points ζ dont une coordonnée au moins est incommensurable. Quant aux points z_n, chacun d'eux est singulier pour une seule branche, régulier pour les autres ([1]).

La définition des points singuliers.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition générale et commode des points singuliers et d'expliquer en même temps pourquoi l'on doit rejeter telle ou telle définition naturelle au premier abord.

Laissons d'abord de côté la définition adoptée jusqu'à présent, et proposons-nous, étant donné un point a, de reconnaître s'il est singulier en prolongeant analytiquement la fonction $w(z)$ à partir de la valeur z_0 jusqu'au point a. A cause des branchements de la fonction, nous avons vu que a peut être régulier ou singulier suivant la branche et le chemin suivis. Devons-nous accepter la définition suivante : a est singulier si, *quel que soit le chemin suivi*, on ne peut jamais régulièrement atteindre a (je veux dire encercler a dans le cercle de convergence d'un élément de fonction)? Évidemment cette définition ne donnera pas de points non singuliers, mais elle nous fera rejeter les points qui ne sont singuliers que pour quelques branches seulement : les points singuliers pour toutes les branches sont peut-être plus singuliers

([1]) C'est M. Painlevé qui a le premier signalé ces singularités auxquelles conduit logiquement la notion de fonction analytique de Weierstrass. *Voir* la Notice sur ses travaux scientifiques, Paris, 1901.

que les autres, mais une définition qui les donnerait comme seuls points singuliers serait évidemment insuffisante.

Pouvons-nous, au contraire, transformer ainsi la définition : a est singulier s'il existe au moins un chemin $z_0 a$, qui ne permette pas d'atteindre régulièrement a. Cette seconde définition est encore plus mauvaise que la première, car elle nous donne comme points singuliers tous les points du plan. Il nous est loisible, en effet, de faire passer le chemin $z_0 a$ par un point singulier, par exemple celui qui est sur le cercle de convergence de l'élément de fonction au point z_0, et le prolongement analytique ne nous permettra pas d'atteindre a. La définition est donc inacceptable.

Il nous faut donc nous rabattre sur une définition qui donne pour points singuliers ceux qui sont mis directement en évidence comme tels. La définition donnée au début a cette propriété; pouvons-nous nous en contenter? Pas davantage; il y a des points qui sont certainement singuliers et qui ne se trouveront jamais sur un cercle de convergence d'élément de fonction : soit par exemple une fonction uniforme ayant pour coupures deux demi-droites indéfinies Ox, Oy et définie dans l'angle xOy. Tous les points des droites Ox et Oy sont sur le cercle de convergence de certains éléments de la fonction, mais il y a exception pour O lui-même, et cependant O est singulier. On peut dire qu'il l'est comme point limite de points singuliers, et proposer d'ajouter aux points mis en évidence sur les cercles de convergence leurs points limites : cela aurait un très grave inconvénient, puisque nous avons vu qu'un point peut être limite de points singuliers sans être singulier lui-même pour aucune branche de la fonction; la définition n'est donc pas acceptable non plus. Elle aurait encore l'inconvénient de faire appel à *tous* les éléments de la fonction analytique, alors que nous savons qu'on peut représenter toute la fonction par une infinité simplement dénombrable d'éléments une fois choisis.

Voici, en définitive, à quelle définition nous nous arrêtons. Je dirai que a est point singulier s'il est possible de prolonger analytiquement la fonction sur un chemin $z_0 a$ aboutissant à a de façon à atteindre le point a, mais pas à le dépasser; en d'autres termes, on pourra atteindre et dépasser sur le chemin tout point du chemin aussi voisin de a que l'on voudra.

On peut encore préciser ainsi cette définition. Pour que a soit singulier, il faut et il suffit qu'il existe un chemin $z_0 a$ tendant vers a seul et jouissant des propriétés suivantes : 1° tout point z de ce chemin est le centre d'un élément de fonction, ces éléments constituant dans leur ensemble une même branche de fonction, c'est-à-dire se prolongeant les uns les autres; 2° le rayon d'holomorphie de chaque élément est infiniment petit avec la distance za (1).

Cette définition a un inconvénient apparent : si une fonction uniforme, par exemple, a une coupure fermée, les points de la coupure se trouvent seuls singuliers et non les points extérieurs à la coupure; or ce ne sont évidemment pas là des points réguliers. On échappe à cette objection en classant les points du plan en trois catégories : les points réguliers, les points singuliers, et, en troisième lieu, les points en dehors du domaine d'existence de la fonction pour lesquels, la fonction n'existant pas, on peut dire ou non qu'ils sont singuliers sans qu'aucun inconvénient grave en résulte.

Malgré la simplicité de cette notion ainsi précisée, on a bien l'impression que la définition de Weierstrass qui tient en quelques lignes laisse apparaître, quand on la creuse, une complication formidable, et l'on sent bien la nécessité d'une représentation nouvelle, d'une image, qui permette d'éviter cette complication. C'est la notion de plan multiple de Riemann qui va nous la donner.

Les surfaces de Riemann.

On sait quelle simplification apporte dans la théorie des fonctions algébriques la notion de plan recouvert de plusieurs feuillets infiniment voisins, unis entre eux au moyen de petites surfaces joignant les bords infiniment voisins de lignes de passage tracées dans les feuillets, de façon que le tout forme une seule surface. La conception de cette surface tient à cette remarque qu'étant

(1) Il est à peu près évident que, moyennant ces deux hypothèses, le rayon d'holomorphie qui est infiniment petit ne peut pas être plus grand que za lui-même; il lui est inférieur ou égal. Dans ce dernier cas, a sera mis directement en évidence comme point singulier.

donnée une fonction algébrique, à l'indication des coordonnées d'un point du plan, il faut adjoindre l'indication de celle des branches dont on parle pour connaître la valeur de la fonction en ce point. On peut faire pour les fonctions multiformes quelque chose d'analogue, mais il faudra naturellement superposer une infinité de feuillets, puisque le nombre des valeurs de la fonction en un point est en général infini.

C'est à M. H. Poincaré ([1]) qu'est due cette conception. Voici comment il la présente. Associons à chaque point du plan des z une des valeurs prises par la fonction $w(z)$, ce qui se fait d'une infinité de façons, et regardons comme distincts deux points confondus géométriquement si les valeurs inscrites de la fonction sont différentes. Imaginons alors une infinité de feuillets plans superposés et réunis de façon à former une surface connexe; pour définir entièrement cette surface, il nous suffira d'indiquer à quelle condition nous en regardons deux points comme distincts. Pour cela, il suffira : ou bien qu'ils aient des coordonnées différentes; ou bien, s'ils ont les mêmes coordonnées, que les valeurs de la fonction qui y sont inscrites soient différentes; ou bien, ces valeurs étant les mêmes, que les points se trouvent intérieurs à deux cercles de convergence de deux éléments de fonctions qui ne sont pas identiques.

Il n'est pas douteux que ces quelques lignes sont suffisantes pour donner à chacun une conception nette de la surface, mais il n'est pas moins vrai qu'il est nécessaire et d'ailleurs extrêmement intéressant et important de développer beaucoup ces indications. J'aurai livré le fond de ma pensée, quand j'aurai dit que les progrès ultérieurs de la théorie générale des fonctions multiformes résulteront presque uniquement des progrès de la théorie des surfaces de Riemann à une infinité de feuillets. Et il s'en faut de beaucoup qu'on puisse du premier coup arriver à des résultats aussi simples que ceux qui concernent les surfaces attachées à une fonction algébrique. Là, on n'avait affaire qu'à un nombre fini de points critiques; on les joignait entre eux par un certain nombre de coupures. On ne peut pas procéder ainsi quand on a affaire à une infinité, qui n'est même pas dénombrable, de points singuliers.

([1]) *Bulletin de la Société Mathématique*, 1883, et *Acta Mathematica*, t. XXXI.

D'ailleurs, ce ne sont pas ces coupures qui jouent un rôle essentiel dans l'étude de la surface : elles ne sont qu'une simplification d'ordre surtout didactique. Mais, si on ne peut rien faire de tel [1] pour une fonction analytique multiforme, l'inconvénient n'est sans doute pas très grand.

Voici comment on peut rendre un peu plus concrète la conception de M. Poincaré. Il ne faut pas regarder, bien entendu, comme définitives les quelques lignes qui suivent. Au contraire, le but de ce Livre sera rempli si j'ai pu persuader le lecteur du grand intérêt qui s'attache à des recherches sur ces surfaces. Mais je pense que ces explications contribueront à la netteté de la conception.

D'après M. Poincaré, on peut trouver une infinité *dénombrable* d'éléments de fonction $P_n(z)$ dont l'ensemble représente entièrement la fonction, c'est-à-dire que, si on a pu atteindre un point z_0 avec la valeur de w_0 de la fonction, ce point z_0 est intérieur à un des cercles de convergence de l'un des éléments, et cet élément prend en z_0 la valeur w_0 [2]. Désignons par C_n le cercle de convergence de $P_n(z)$.

Parmi les cercles C_n prenons-en deux quelconques empiétant l'un sur l'autre. Alors, dans la partie commune aux deux cercles, les deux éléments correspondants ont ou n'ont pas la même valeur. S'ils ont la même valeur, supprimons les deux arcs de cercle qui limitent cette partie commune. Supposons cette opération faite pour tous les couples de cercles C_n (ce qui se fait par une infinité dénombrable d'opérations). Convenons alors que, si deux cercles se recouvrent sans que les éléments coïncident, leurs plans sont superposés, mais non confondus. Au plan des z est alors substituée

---

[1] Dans ses *Leçons sur les fonctions définies par une équation du premier ordre*, M. Boutroux considère la surface de Riemann attachée à une fonction multiforme comme sillonnée ainsi par un système de coupures. On est en droit de demander quelques explications supplémentaires.

[2] Une question intéressante qu'on peut se poser à ce sujet est la suivante. Je l'ai signalée dans mon cours. Un de mes auditeurs, M. Dienes, m'a dit se l'être posée également : peut-on représenter entièrement au sens donné à ces mots dans le texte une fonction analytique par un ensemble dénombrable d'éléments $P_n(z)$ jouissant de plus de la propriété suivante : que chaque élément P_n prolonge analytiquement le précédent P_{n-1} ? Cela ne résulte pas de la démonstration de M. Poincaré pour le théorème indiqué. La question est intéressante à étudier.

une surface formée de feuillets plans sans que nous ayons à nous inquiéter de la façon dont ces feuillets sont réunis ou de la façon dont ils se traversent.

Voici le grand intérêt qui s'attache à la conception de ces surfaces.

S'il n'est pas simple, comme on l'a vu, de donner des points singuliers en général une définition satisfaisante, il est encore plus difficile de définir les points singuliers attachés à *une branche déterminée* de fonction et même de définir une branche de la fonction. A vrai dire, ces expressions sont strictement dénudées de sens, et la première des choses à faire serait justement de leur en attribuer un. Sur la surface de Riemann, la question est certainement plus simple. Il est probable, en outre, que sur la surface de Riemann l'ensemble des points singuliers doit être un ensemble fermé. Ces indications sont évidemment bien vagues; mais cela montre justement combien cette importante question mérite d'être travaillée.

Classification des points singuliers.

Il nous faut maintenant, en nous basant sur la théorie des ensembles, établir une classification des points singuliers; mais cela ne peut se faire qu'après avoir résolu la question suivante : existe-t-il toujours une fonction analytique admettant un ensemble singulier *donné?* et, dans le cas contraire, quels sont les seuls ensembles singuliers qui puissent se présenter?

Supposons d'abord qu'il s'agisse uniquement d'une fonction uniforme. L'ensemble singulier est alors, nous l'avons vu, un ensemble fermé. Demandons-nous donc si, étant donné un ensemble fermé quelconque, on peut former une fonction analytique uniforme admettant cet ensemble comme ensemble singulier. Nous allons voir que la réponse est affirmative moyennant certaines conventions. La question a déjà été étudiée à un point de vue peut-être un peu différent par certains auteurs, notamment M. Goursat (¹). Mais la démonstration de ce dernier n'est pas absolument générale; de plus, elle est basée sur des

---

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, 1887.

considérations géométriques qui demandent à être rendues absolument rigoureuses, ce qui est sans doute possible. C'est pourquoi je reprends entièrement la question.

Soit E l'ensemble donné; on a vu plus haut (p. 14) que l'on peut trouver un ensemble F dénombrable de points de E dont le dérivé soit E lui-même. Soient a_n les points de F. Considérons la série

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}, \tag{1}$$

en supposant que les A_n sont des nombres par exemple réels et positifs et, pour l'instant, tels simplement que la série $\sum A_n$ soit convergente. La suite fera apparaître d'autres conditions pour les A_n.

La série (1) converge absolument pour tout point z distinct des points de E. En effet, la distance $z - a_n$ pour un tel point a un minimum non nul δ; l'on a

$$\sum \left| \frac{A_n}{z - a_n} \right| < \sum \frac{A_n}{\delta}, \tag{2}$$

et le second membre est une série convergente.

Elle converge aussi uniformément dans tout domaine D ne comprenant aucun point de E à l'intérieur ou sur la frontière, car, dans ces conditions, l'écart de D à E est un nombre non nul δ; on a donc, quel que soit n et quel que soit z dans D,

$$|z - a_n| > \delta,$$

d'où l'inégalité (2) et la conclusion ([1]). La fonction $f(z)$ est donc analytique et uniforme dans tout domaine D, et ses seuls points singuliers sont parmi les points de E. Mais il faut montrer que tous les points de E sont effectivement singuliers; il suffira de le démontrer pour les points de F, car tout point de E est limite de points de F et tout point limite de points singuliers est singulier.

Soit à démontrer que le point $z = a_p$ est singulier; s'il ne l'était

([1]) Le domaine D peut d'ailleurs ne pas exister. Alors E comprend tout le plan.

pas, la fonction $f(z)$ serait holomorphe dans tout un cercle de centre a_p et par suite serait bornée dans ce cercle. Il suffira donc de montrer qu'on peut trouver *des* valeurs de z aussi voisines qu'on veut de a_p où le module de $f(z)$ dépasse toute valeur donnée.

Posons $\sum A_n = S$, et traçons de a_p comme centre deux cercles de rayons δ et $\delta' = 2\delta$; dans la somme de la série (1) distinguons 3 groupes de termes.

1° le terme $\dfrac{A_p}{z - a_p}$;

2° la somme $\sum_1 \dfrac{A_n}{z - a_n}$ relative aux points a_n intérieurs au cercle δ';

3° la somme $\sum_2 \dfrac{A_n}{z - a_n}$ relative aux points extérieurs au même cercle.

Évaluons d'abord $\sum_2$; supposons z intérieur au cercle δ; alors $z - a_n$ est au moins égal à δ. On a donc

$$\left| \sum_2 \frac{A_n}{z - a_n} \right| < \frac{1}{\delta} \sum_2 A_n < \frac{\sum_2 A_n}{z - a_p}.$$

Calculons maintenant $\sum_1$; on a

$$\frac{1}{z - a_n} = \frac{1}{z - a_p} + \frac{a_n - a_p}{(z - a_n)(z - a_p)}$$

et, par conséquent,

$$\sum_1 \frac{A_n}{z - a_n} = \frac{1}{z - a_p} \sum_1 A_n + \frac{1}{z - a_p} \sum_1 \frac{a_n - a_p}{z - a_n} A_n.$$

Je vais déterminer *des* points z (intérieurs au cercle δ) de façon que la deuxième partie de la somme soit négligeable. Pour cela considérons l'ensemble des points du plan, pour lesquels on a

$$(3) \qquad \left| \frac{A_n}{z - a_n} \right| < \frac{A_p}{n^q \delta},$$

q désignant un entier provisoirement arbitraire. Ces points sont les points extérieurs au cercle C_n :

$$|z - a_n| = \frac{A_n n^q \delta}{A_p}.$$

Si je m'arrange de façon que la somme des aires de ces cercles soit inférieure à $\pi\delta^2$, il restera certainement des points du cercle δ extérieurs à tous les cercles C_n; il suffit pour cela que

$$\pi\sum_1 \frac{A_n^2 n^{2q}}{A_p^2}\delta^2 < \frac{\pi\delta^2}{2}$$

ou encore

$$(4)\qquad \sum_1 \frac{A_n^2 n^{2q}}{A_p^2} < \frac{1}{2}.$$

On devine sans préciser davantage que, quelque grand que soit donné l'entier q, on peut toujours choisir *a priori* la série $\sum A_n$ assez rapidement convergente pour que la somme précédente étendue à toutes les valeurs de n *à partir de* $n = p^h$ soit, quel que soit p, inférieure à tout nombre donné. Or p est un entier fixe, et, si nous négligeons les valeurs de n inférieures à p^h, nous retranchons de $f(z)$ une fonction rationnelle de z holomorphe et par conséquent bornée pour $z = a_p$, et qui par suite ne saurait modifier nos conclusions. Donc, nous supposons la condition précédente (4) remplie; je laisse au lecteur le soin de déterminer h et μ en posant par exemple $A_n = n^{-\mu}$.

Soit donc un point z pour lequel toutes les conditions (3) ont lieu. Calculons $\sum_1$ pour un tel point; nous aurons

$$\left|\sum_1 \frac{A_n}{z-a_n}\right| < \left|\frac{\sum_1 A_n}{z-a_p}\right| + \frac{1}{|z-a_p|}\sum_1 \frac{|a_n-a_p|A_p}{n^q\delta}.$$

Or

$$|a_n - a_p| < 2\delta;$$

donc *a fortiori*

$$\left|\sum_1 \frac{A_n}{z-a_n}\right| < \frac{\left|\sum_1 A_n\right|}{|z-a_p|} + \frac{2A_p}{|z-a_p|}\sum_1 \frac{1}{n^q},$$

et l'on peut écrire

$$\sum_1 \frac{A_n}{z-a_n} = \frac{\sum_1 A_n}{z-a_p} + \frac{2\theta A_p}{z-a_p}\sum \frac{1}{n^q},$$

θ désignant un nombre de module inférieur à l'unité.

Nous aurons en définitive

$$(5)\qquad f(z) = \frac{A_p}{z-a_p} + \frac{\theta \sum_2 A_n}{z-a_p} + \frac{\sum_1 A_n}{z-a_p} + \frac{2\theta A_p}{z-a_p}\sum \frac{1}{n^q},$$

θ désignant différents nombres de module inférieur à 1.

Choisissons l'entier q de façon que $\sum \frac{1}{n^q}$ soit inférieure à $\frac{1}{4}$; c'est évidemment possible, et cela que la somme $\sum$ commence à $n = p^h$ ou qu'elle commence à $n = 2$; le choix ainsi fait de q détermine le choix des A_n de façon que l'inégalité (4) ait lieu, et je remarque que cette inégalité subsistera *a fortiori* si l'on prend une série A_n plus rapidement convergente. Supposons qu'elle soit assez rapidement convergente pour que l'on ait $\sum A_n < \frac{A_p}{4}$, la somme étant étendue à toutes les valeurs de n supérieures à p^h ($h = 2$ si l'on veut). Négligeons définitivement toutes les valeurs de n (sauf $n = p$) inférieures à p^h et supposons que ces valeurs ne figurent pas dans l'égalité (5); la fonction $f(z)$ n'est donc plus celle du début, mais en diffère par une fonction holomorphe connue.

On a alors

$$f(z) = \frac{1}{z-a_p}\left(A_p + \theta\sum_2 A_n + \sum_1 A_n + 2\theta A_p \sum \frac{1}{n^q}\right).$$

Or la parenthèse est supérieure à

$$A_p - \left(\sum_1 A_n + \sum_2 A_n\right) - 2A_p \sum \frac{1}{n^q}$$

et *a fortiori* à

$$A_p - \frac{A_p}{4} - \frac{A_p}{2} = \frac{A_p}{4}.$$

Donc

$$|f(z)| > \frac{A_p}{4|z-a_p|}.$$

Si l'on veut que $f(z)$ soit plus grand que M, il suffira donc de prendre

$$\delta < \frac{A_p}{4M}$$

(en remarquant que le choix de δ n'intervient pas dans la détermination de q, h, μ), et l'on pourra affirmer que dans le

cercle δ il y a *des* points z où $|f(z)| = M$. Donc la fonction $f(z)$ n'est pas bornée; il y a contradiction.

J'ai laissé de côté à dessein la détermination précise de certains éléments du calcul précédent pour montrer qu'il y a un certain degré d'arbitraire dans le choix de la série $\sum A_n$. Cependant, elle ne peut sans doute pas être prise absolument au hasard, car on comprend que, le point a_p étant limite de certains points a_n, il faut que les termes $\frac{A_n}{z - a_n}$ correspondants ne viennent pas détruire l'effet du terme qui devient infini $\frac{A_p}{z - a_p}$.

Remarquons encore qu'il peut exister des fonctions *absolument* différentes de celles que nous venons de former, et qui admettent E pour ensemble singulier : supposons que E soit par exemple une circonférence; les fonctions $f(z)$ que je viens d'obtenir deviennent infinies au voisinage de tout point du cercle; or, on sait, et nous y reviendrons, qu'il y a des fonctions admettant E pour coupure et bornées ou même continues au voisinage de E et sur E.

La démonstration précédente répond-elle absolument à la question posée? Avons-nous bien obtenu une *fonction analytique* uniforme ayant E pour ensemble singulier? Pas tout à fait. Dans tout domaine connexe sans point commun avec E, la série uniformément convergente (1) définit une fonction analytique. Distinguons donc deux cas. Ou bien l'ensemble E morcelle le plan, ou bien il ne le morcelle pas. Dans le second cas, deux points distincts de E, z_0, z_1, peuvent toujours être joints par un trait qui ne contienne aucun point de E et par suite on peut trouver un domaine connexe sans point de E, contenant z_0 et z_1. Donc $f(z_0)$ et $f(z_1)$ sont les valeurs aux points z_0, z_1 d'une même fonction analytique (uniforme). Dans le premier cas, au contraire, la série $f(z)$ définit autant de fonctions analytiques au sens de Weierstrass qu'il y a de morceaux séparés par E dans le plan. Chacune de ces fonctions admet d'ailleurs tout ou portion de E comme frontière naturelle et par suite ne saurait être prolongée là où d'autres existent [1].

---

[1] On peut même partir de là avec M. Borel pour concevoir sans contradiction une généralisation de la notion de fonction analytique (voir *Thèse*, 1894, ou *Annales de l'École Normale*, 1895).

Ce n'est qu'avec cette restriction indispensable et qu'on pouvait prévoir qu'il est permis de dire que nous pouvons obtenir une fonction analytique ayant pour ensemble singulier un ensemble fermé donné.

Supposons que E comprenne une aire; si l'on applique exactement le procédé précédent, qui n'est pas en défaut, on trouve une fonction qui n'existe pas dans cette aire; mais on peut modifier le procédé de la façon suivante : on prendra l'ensemble a_n dense sur la *frontière* de E. On obtiendra alors par la série $f(z)$ deux fonctions analytiques définies l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de la frontière de E.

Posons-nous maintenant la même question pour une fonction multiforme. Quel est l'ensemble singulier le plus général qu'elle puisse admettre? Comme je vais le montrer, tout dépend de la définition choisie pour ce qu'on appelle point singulier. Je montre d'abord, qu'avec la définition ordinaire, on peut former une fonction ayant pour points singuliers tous les points du plan.

Considérons dans le plan des z une série de cercles concentriques à l'origine de rayons r_n tendant vers zéro, et posons $z = re^{i\theta}$, θ étant compris entre 0 et 2π. Posons $u = \log z$ et supposons que lorsque z décrit le cercle r_n nous considérions le point

$$u_n = \log r_n + i(\theta + 2n\pi);$$

ce point décrit un segment de droite parallèle à l'axe complexe. Formons une fonction uniforme $g(u)$ admettant ces segments de droite pour lignes singulières. La fonction $g(\log z) = f(z)$ admet tous les cercles r_n comme coupures; elle est définie dans tout le plan des z, mais on pourrait dire que chaque branche admet pour points singuliers tous les points extérieurs au cercle coupure r_n correspondant. Tous les points du plan seraient donc singuliers.

Doit-on considérer ce qui précède comme satisfaisant? Oui, lorsqu'on appelle point singulier un point a tel qu'on puisse trouver un chemin za le long duquel le prolongement analytique ne permette pas de dépasser a. Mais alors nous savions déjà que tout point du plan est singulier quelle que soit la fonction $f(z)$ donnée.

Nous avons été conduits à la définition suivante : un point a est singulier s'il existe un chemin za tel qu'en le suivant, le prolon-

gement analytique permette *d'atteindre a*, mais pas de le *dépasser*. En d'autres termes, le rayon d'holomorphie doit tendre vers zéro quand z tend vers a sur ledit chemin, et cette définition a l'avantage de ne donner pour points singuliers que ceux qui sont réellement mis en évidence sur la frontière du domaine d'existence.

Cette définition étant ainsi précisée, l'ensemble singulier est-il quelconque, ou, dans le cas contraire, à quelles restrictions est-il soumis? La question n'est pas résolue [1]; elle paraît devoir l'être très simplement quand la notion de surface de Riemann attachée à une fonction multiforme sera suffisamment éclaircie. Je donne comme vraisemblable le résultat suivant : *l'ensemble singulier est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.* On comprend qu'il en puisse être ainsi si l'on réfléchit que le nombre des branches est dénombrable et que, sans doute, on pourra définir les points singuliers d'une branche de façon que leur ensemble soit fermé.

Essayons de démontrer la réciproque : peut-on former une fonction ayant pour points singuliers les points obtenus en réunissant une infinité dénombrable d'ensembles fermés $E_1, E_2, \ldots, E_n$?

Posons

$$z = re^{i\theta} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

et faisons correspondre aux points E les points suivants : si z est un point de E_1, posons

$$u_1 = \log r + i(\theta + 2\pi);$$

si z est un point de E_n, posons

$$u_n = \log r + i(\theta + 2n\pi).$$

Nous obtenons ainsi un ensemble dénombrable d'ensembles :

---

(1) Je n'ai pas voulu, en rédigeant ce Livre, modifier la façon dont j'avais présenté cette question au cours. Depuis lors, une Note de M. P. Kœbe a paru dans les *Comptes rendus* (t. CXLIX, 1909, p. 1446), où il étudie la question de la détermination d'une fonction analytique par un domaine d'existence (une surface de Riemann) donné. Il considère la surface comme limite de surfaces ayant un nombre fini de points de ramification. On trouvera dans la Note du même auteur (t. CXLIX, p. 824) l'indication de ses travaux sur l'uniformisation des fonctions analytiques.

les ensembles $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Je dis que l'ensemble

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est fermé en y ajoutant le point à l'infini.

En effet, pour avoir un point limite des u on peut s'y prendre de deux façons : ou bien employer un nombre *fini* de valeurs de n, et prendre alors au moins dans l'un des u_n une infinité de points ; ou bien employer une infinité de valeurs de n. Dans le second cas, les points u correspondants tendent vers l'infini, car n doit croître indéfiniment et par suite $\theta + 2n\pi$. Dans le premier cas, supposons n fixe et supposons que les points

$$\log r + i(\theta + 2n\pi) = x + iy$$

aient un point limite $x_0 + iy_0$: il faut donc que $\log z$ tende vers x_0 et $\theta + 2n\pi$ vers y_0. Le point $z = e^{x+iy} = re^{i\theta}$ a donc pour point limite le point

$$\zeta = e^{x_0+iy_0} = e^{x_0}(\cos y_0 + i \sin y_0).$$

Ce point ζ est un point de E_n puisque E_n est fermé. Le point u qui correspond à ce point ζ est $x_0 + i(y_0 + 2k\pi)$, l'entier k ayant une valeur telle que $y_0 + 2k\pi$ soit compris entre $2n\pi$ et $2(n+1)\pi$. Donc $k = 0$, car y_0, limite de $\theta + 2n\pi$, est compris entre $2n\pi$ et $2(n+1)\pi$. Le point u qui correspond à ζ est donc $x_0 + iy_0$; ce point limite des points u_n est donc lui-même un point u_n.

Nous pouvons donc, d'après le théorème précédemment démontré, former une fonction uniforme ayant pour ensemble singulier l'ensemble fermé u. La fonction $g(\log z) = f(z)$ admet l'ensemble

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

pour ensemble singulier.

La démonstration comporte certaines restrictions : pour que l'échange des différentes branches du logarithme puisse se faire, il faut qu'on puisse décrire un lacet autour de $z = 0$. A ce lacet correspondent dans le plan des u une infinité de chemins formés de deux parallèles à l'axe réel réunies par un segment parallèle à l'axe complexe. Supposons que $z = 0$ ne soit pas point limite

de l'ensemble E; alors le prolongement analytique le long du lacet est possible et la démonstration est valable. Plus généralement, elle l'est pourvu qu'il existe un point z_0 non limite des E, c'est-à-dire pourvu que E ne soit pas dense dans tout le plan, comme on le voit en remplaçant $\log z$ par $\log(z - z_0)$ dans ce qui précède. Seulement l'ensemble singulier u peut morceler le plan des u et la fonction $g(u)$ ne peut pas toujours être prolongée dans le plan entier. Nous considérerons le continuum du plan des u qu'on peut obtenir sans rencontrer de point singulier en partant d'une valeur de z à partie réelle infinie négative. Si la frontière de ce domaine comprend la totalité des points singuliers u, la fonction $f(z)$ admet *tous* les points singuliers E; mais il peut très bien arriver que les points singuliers de $g(u)$ ne soient qu'une portion de l'ensemble u, et alors $f(z)$ peut n'admettre qu'une partie de l'ensemble singulier E. Il resterait également à traiter le cas où l'ensemble E est dense dans tout le plan; j'ai traité plus haut le cas d'un ensemble dénombrable, le cas général ne serait pas beaucoup plus difficile; je n'y insiste pas, la réciproque surtout étant à mon avis importante.

Nous pouvons aborder maintenant la classification des points singuliers. Considérons d'abord le cas d'une fonction uniforme. L'ensemble singulier est fermé. Deux cas apparaissent tout de suite : ou bien il est dénombrable, ou bien il ne l'est pas. Dans ce dernier cas, il se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable. Cet ensemble parfait peut ou bien être partout discontinu, ou bien comprendre des portions continues. D'où en définitive trois grands cas.

L'étude que je vais entreprendre de l'allure d'une fonction au *voisinage* d'un point singulier demande une classification légèrement différente. En effet, nous verrons, et cela se conçoit bien, que cette allure est en majeure partie, et au moins dans ce qu'elle a de général, indépendante des singularités *qui ne sont pas voisines* de celles qu'on étudie. Donc, considérons un point singulier a et les singularités renfermées dans un cercle de centre a. Un premier cas très simple est celui où ce cercle peut être choisi assez petit pour que le seul point singulier intérieur soit le point a lui-même. Le point a est alors dit *isolé*. En second lieu, supposons que le point a soit limite de points singuliers. Alors, ou bien on pourra trouver

un cercle de centre a assez petit pour que les points singuliers situés dans ce cercle forment un ensemble dénombrable, ou bien, quelque petit que soit ce cercle, il y aura toujours à son intérieur un ensemble non dénombrable de points singuliers; suivant que cet ensemble est partout discontinu ou renferme des portions continues, nous dirons que *a appartient* à un ensemble discontinu ou continu de points singuliers.

En particulier, il peut arriver, quelque compliquées que soient les singularités voisines de a, qu'il y ait parmi elles un ensemble de points isolés tendant vers a. C'est la suite qui montrera l'importance de ce dernier cas.

Essayons d'aborder la classification des points singuliers des fonctions multiformes. Il apparaît tout de suite que les cas simples qui précèdent ne peuvent se généraliser que dans une mesure très faible. Il n'y a guère qu'un cas qui puisse s'étendre facilement : c'est celui du point isolé. Précisons-le un peu; supposons que le prolongement analytique d'une branche de fonction ait été possible jusqu'en a, mais pas au delà, et, par conséquent, ait mis en évidence a comme point singulier. Entourons a d'un cercle et prolongeons analytiquement la branche initiale de toutes les façons possibles dans ce cercle. Le point sera isolé si le cercle peut être choisi assez petit pour que le seul point singulier mis en évidence à son intérieur par le procédé précédent soit a.

Voici encore un cas où l'extension se fait facilement. Supposons que dans un cercle assez petit entourant a la branche initiale de fonction qui a donné a pour point singulier soit uniforme. On peut alors appliquer à cette branche tout ce qui a été dit plus haut pour une fonction uniforme et adopter pour les points singuliers intérieurs au cercle une classification analogue.

La notion de coupure.

Voici encore un cas qu'il semble nécessaire et intéressant d'étudier; c'est celui de la coupure. Il semble impossible de ne pas essayer de caractériser pour les fonctions multiformes le mot de coupure. Pour les fonctions uniformes, la classe des fonctions à lignes singulières est tellement importante et tellement particulière qu'il est indispensable de rechercher les cas qui méritent le nom d'ana-

logues dans les fonctions multiformes. On va, dans ce qui suit, pouvoir se faire une idée de la complication des raisonnements généraux sur les fonctions multiformes.

Je me pose donc la question bien nette suivante : quand doit-on dire qu'une fonction multiforme a une coupure? que doit-on entendre par là ?

La réponse paraît devoir être simple. Il y a coupure quand l'ensemble des points singuliers renferme une portion continue. Voici en quelques mots le raisonnement qu'on pourrait faire : chaque branche de la fonction admet un ensemble fermé de points singuliers : il y a une infinité dénombrable de branches : si donc aucune n'avait parmi ses points singuliers une ligne, d'après un théorème démontré plus haut, il n'y aurait pas non plus de ligne dans leur somme. Mais il ne faudrait pas confondre ces explications avec une démonstration, et la preuve en est que, comme nous le verrons, ce résultat n'est pas exact.

Je vais donc être obligé de donner une définition *a priori* de la coupure et de la légitimer ensuite en montrant que dans des cas étendus et *utiles* on peut démontrer l'existence d'une coupure ainsi définie : quand on effectue une généralisation, il faut évidemment que ce ne soit pas dans un sens arbitraire.

Soit un chemin L sur lequel une branche w de la fonction $w = f(z)$ poursuivie analytiquement met en évidence un premier point singulier a. Je dirai qu'une ligne cantorienne λ passant par a est coupure de la fonction w si elle jouit des propriétés suivantes : 1° on peut trouver une ligne variable μ ayant λ pour ligne limite le long de laquelle *la branche* w soit prolongeable; 2° considérons une ligne μ particulière; le rayon d'holomorphie de w relatif aux différents points de μ admet un certain maximum ε. Ce maximum doit tendre vers zéro quand μ tend vers λ.

Expliquons cette définition. Chaque ligne μ met en évidence un ensemble de points singuliers (situés sur les cercles de convergence relatifs aux points de μ), et l'ensemble limite de cet ensemble coïncide visiblement avec λ; mais il peut très bien arriver que les points de λ ne soient pas singuliers au sens donné plus haut à ce mot.

Il s'agit maintenant de déterminer les circonstances dans

lesquelles on pourra affirmer l'existence d'une coupure au sens précédent. En voici quelques exemples.

Soit a un point jouissant de la propriété suivante. On a pu prolonger analytiquement $w(z)$ sur un chemin L jusqu'en a ; et d'autre part, il existe un cercle C de centre a tel que si l'on prolonge à partir du dernier arc de L intérieur à C (ces mots ont un sens bien précis) la fonction w sans sortir du cercle, il y aura un ensemble continu de points, M (comprenant a comme point frontière), que le prolongement analytique ne permet pas de dépasser (ils ne seront jamais à l'*intérieur* d'un cercle de convergence d'une des séries de Taylor). Traçons de a comme centre un cercle de rayon ε : C_1 ; prolongeons w sur la circonférence de C_1 à partir du dernier point de rencontre de L et de C_1 (ce point existe) ; ce prolongement ne permettra pas de faire un tour complet sur le cercle, puisque C_1 rencontre l'ensemble M ; on sera donc arrêté en un point singulier ; soit a_1 le premier de ces points singuliers. Traçons de a_1 comme centre un cercle C_2 de rayon ε et prolongeons w sur la circonférence de C_2 à partir du point de rencontre de C_2 avec l'arc régulier de C_1 (je veux dire l'arc de C_1 sur lequel on avait déjà prolongé w régulièrement). Si, ce qui est possible, le cercle C_2 ne rencontrait pas cet arc C_1, c'est que C_2 rencontrerait L avant l'entrée définitive de L dans C_1 ; c'est alors à partir de ce point de rencontre de L et C_2 qu'on prolongerait w. Cette fois-ci, ou bien en tournant sur C_2 nous parviendrons au point de rencontre de C_1 et de C_2 sans encombre, et alors nous continuerons à tourner sur C_1 à partir de ce point et toujours dans le même sens (cela n'est d'ailleurs pas essentiel) ; ou bien nous trouverons, sur C_2 même, un point singulier : en tous cas un point singulier a_2 sera toujours mis en évidence, soit sur C_2, soit sur C_1. Traçons un cercle C_3 de centre a_2 et de rayon ε, et prolongeons w à partir du premier point de rencontre de C_3 avec la courbe régulière formée d'arcs de C_1 et C_2 sur laquelle nous prolongeons w antérieurement, et ainsi de suite.

Nous constituons ainsi une ligne le long de laquelle nous prolongeons $w(z)$. Je dis que cette ligne finit par atteindre le contour du cercle C. En effet, nos cercles C_1, C_2, etc., sont égaux ; le centre de chacun est sur l'un des précédents ; de plus, à cause de C_1, dont il est impossible de faire le tour complet, les cercles C_1, C_2, etc., ne

peuvent pas recouvrir un nombre infini de fois l'aire C (ni même deux fois). Il y a donc un nombre fini de ces cercles dans C. Le dernier donnera un prolongement jusqu'à la circonférence de C.

Soit λ la ligne ainsi construite; quand ε tend vers zéro, λ tend vers un ensemble l qui est continu. En effet, nous sommes dans les conditions d'application du théorème de la page 26 : λ est continu et le point a est limite pour *tous* les λ. Pour que l soit une coupure, il faudra encore, d'après la définition, que tout point de chaque ligne λ soit à une distance d'un point singulier inférieure à une quantité infiniment petite avec ε. Or, ce n'est pas ce qui a lieu; quand on décrit chaque cercle C_n, il y a deux cas à distinguer; ou bien c'est sur ce cercle même qu'on va rencontrer un point singulier, ou bien il n'en est rien. Dans le premier cas, les points de C_n sont à une distance inférieure à 2ε d'un point singulier; dans le second on n'en sait rien. Mais, sur chacun des arcs de cercle C_n qui constituent λ, il y a certainement des points de la première sorte, tandis qu'il n'y en a pas forcément de la deuxième.

Je dis alors que tous les points de l sont limites des points de λ de la première sorte. En effet, si un point est limite d'un point du cercle C_n, il est limite en même temps de tous les points de ce cercle, puisque le rayon du cercle, ε, tend vers zéro; en d'autres termes, si un point est limite des points de deuxième sorte de λ, il est en même temps limite des points de première sorte situés sur le même cercle C_n. Donc les points de l forment deux groupes : ceux qui sont limites uniquement de points de première sorte, ceux qui sont à la fois limites de points des deux sortes. En tous cas, l'ensemble limite des points de première sorte seuls est constitué par l tout entier.

Considérons les points de première sorte sur une ligne λ : ils forment des arcs *en nombre fini*. Supposons que ε en tendant vers zéro prenne une infinité dénombrable de valeurs. Si nous prenons un arc sur chaque ligne, nous pourrons combiner ces arcs entre eux d'une infinité dénombrable de manières. Or, chaque point de l est point limite pour une de ces combinaisons. Je dis qu'une de ces combinaisons donne naissance à un continu limite. En effet, s'il n'en était pas ainsi, chaque combinaison donnerait naissance à un ensemble limite ne comprenant aucun continu; la réunion d'une infinité dénombrable de tels ensembles (qui sont

fermés) ne pourrait donner un continu l, d'après le théorème de la page 17. Si nous prenons la combinaison d'arcs qui donne naissance au continu μ portion de λ, nous voyons que μ jouit de toutes les propriétés que nous exigeons d'une coupure.

Je reviens sur les hypothèses du début : l'hypothèse que le chemin L tend vers *a et vers a seul* n'est pas essentielle. Essayons de voir ce qu'on pourra faire si L a, avec a, d'autres points limites : on prendra l'*un* des points de rencontre de L avec C (point qui existe certainement), et c'est à partir de ce point-là qu'on prolongera la fonction sur C; on opérera de même quand le rayon de C diminuera. Mais alors, il n'y a plus aucun lien entre les valeurs de la fonction en ces points de départ; on n'a plus aucune raison de dire qu'elles appartiennent à la même branche. Si nous ne voulons pas écarter ce cas, nous serons donc obligés de généraliser de la façon suivante la définition de la coupure.

Soit λ une ligne limite d'une ligne μ. Je dirai que λ est coupure si : 1° on peut prolonger régulièrement sur μ *une branche* au moins de la fonction w; 2° la limite supérieure sur μ du rayon d'holomorphie de cette branche tend vers zéro quand μ tend vers λ.

Pour distinguer entre elles les deux définitions, il est bien naturel de dire que, dans le premier cas, nous avons défini une coupure *pour une branche* de fonction, tandis que, dans le second, c'est une coupure pour la fonction en général. Il est manifeste que c'est le premier cas qui est le plus intéressant et le plus utile. Mais aussi, les conditions nécessaires à l'existence et à la mise en évidence d'une telle coupure sont plus difficiles à réaliser.

Considérons, par exemple, une fonction à espace lacunaire, ou encore à domaine d'existence borné. Un point a de la frontière du domaine d'existence jouit justement des propriétés exigées par la deuxième démonstration : on peut trouver une file de points tendant vers a où une branche de la fonction est régulière, et, d'autre part, dans un cercle de centre a, il y a certainement des points qu'il est impossible d'atteindre. Mais rien ne prouve qu'on puisse trouver un chemin régulier tendant vers *a et vers a seul*, ou tout au moins tendant vers un point singulier unique jouissant des propriétés du point a. J'avais cru démontrer ce point dans ma Thèse, et d'autre part, *a priori*, il semble difficile de ne pas l'admettre; mais ma démonstration, qui fait appel à l'intui-

tion, n'est certainement pas correcte, comme nous le verrons d'après les conséquences qu'on en déduirait. Donc, c'est dans les conditions de la seconde définition que nous sommes : il y a bien une coupure, *mais il n'y a peut-être pas coupure pour une branche déterminée* de la fonction.

Nous verrons plus loin d'une façon indirecte qu'il y a certainement des cas où on peut affirmer qu'il n'y a pas de coupure au premier sens du mot, même quand le domaine d'existence est borné; *a fortiori*, l'existence de points singuliers formant un ensemble continu n'entraîne pas l'existence d'une coupure au premier, ni peut-être même au second sens. Ce sont ces résultats paradoxaux qui montrent d'une part la nécessité absolue d'éviter les appels à l'intuition géométrique dans les raisonnements; d'autre part, la difficulté de la recherche de théorèmes généraux. On pourra aussi conclure à la nécessité des recherches sur la surface de Riemann à une infinité de feuillets qui seule mettra un peu de clarté dans ce chaos.

Les domaines d'indétermination.

La classification des singularités d'après leur configuration géométrique est donc simple pour les fonctions uniformes, beaucoup plus compliquée pour les fonctions multiformes.

Il existe un second moyen de classer les points singuliers. Désirant étudier l'allure de la fonction au voisinage d'un point, on pourra justement classer les points d'après l'allure à laquelle ils donnent lieu. Pour chaque type d'allure on créera un nom spécial, et il sera ensuite intéressant d'établir, si c'est possible, un rapprochement entre les deux classifications et de rechercher si à une configuration géométrique déterminée ne correspond pas une allure également déterminée.

Cette seconde classification est donnée d'une manière tout à fait satisfaisante, puisqu'elle s'étend à toute fonction multiforme, par la notion introduite par M. Painlevé, de *domaine d'indétermination* relatif à un point singulier (¹).

(¹) *Comptes rendus*, t. CXXXI, p. 489. Voir aussi la *Notice sur les Travaux scientifiques de M. Painlevé.*

Supposons qu'un chemin L sur lequel on poursuit analytiquement la fonction $w = f(z)$ conduise à un point singulier a. Traçons un petit cercle C de centre a; le chemin L pénètre à l'intérieur de ce cercle et *finit par n'en plus sortir* [1]. Considérons l'arc de L qui aboutit à a et qui est intérieur à C, et, à partir des points de cet arc, prolongeons w analytiquement dans C de toutes les façons possibles. Marquons dans le plan complexe w l'ensemble des valeurs de la fonction ainsi trouvées E; ajoutons à cet ensemble son dérivé: je dis que l'ensemble $E + E' = F$ est continu. Il est évidemment fermé et parfait, car, si w_0 appartient à E, c'est qu'il y a un point z_0 dans C tel que $w_0 = f(z_0)$ et, pour les valeurs de z voisines de z_0, w est voisin de w_0. De plus, F est bien enchaîné; en effet, si deux points z_0, z_1 donnent lieu à des points w_0 et w_1, il existe un chemin joignant z_0, z_1 dans le cercle C tel que w passe de la valeur w_0 à la valeur w_1. Sur ce chemin, w est continue, donc uniformément continue, et l'on peut par conséquent trouver des points w de E à des distances relatives aussi petites qu'on veut allant de w_0 à w_1 [2].

Recommençons en prenant le même chemin L et un cercle C plus petit: l'ensemble F obtenu est une portion du premier. Donnons au rayon du cercle une infinité dénombrable de valeurs tendant vers zéro; les ensembles F ont un ensemble limite D qui est continu: nous sommes, en effet, dans un cas particulier du théorème de la page 26. C'est cet ensemble D qui est le domaine d'indétermination relatif au point a.

Quels sont donc les différents cas possibles? Le domaine D, étant continu, pourra être un point, une ligne, une aire, tout le plan. Le second et le troisième cas ne sont pas, d'ailleurs, essentiellement distincts.

Avant de revenir sur cette distinction je commence par écarter deux sortes de points singuliers auxquels d'ailleurs s'applique

---

(1) Sinon L ne tendrait pas vers a seul; dire qu'un chemin tend vers un point c'est dire qu'il finit par être *et par rester* à une distance infiniment petite de ce point. Les objections de MM. Fuchs et Forsyth aux raisonnements de M. Painlevé relatifs aux équations différentielles montrent que ces précisions sont nécessaires.

(2) Il est évident que si E est bien enchaîné $E + E'$ l'est aussi.

parfaitement la définition précédente. Ce sont d'abord les *pôles :* c'est-à-dire les points z_0 où la fonction $w(z)$ admet un développement convergent suivant les puissances de $(z-z_0)^{-1}$ et les *points critiques algébriques* où la fonction est développable en série convergente suivant les puissances de $(z-z_0)^{\frac{1}{p}}$. Appelons *points transcendants* les autres points singuliers.

Ceci posé, les points pour lesquels le domaine d'indétermination est réduit à un point s'appellent *points transcendants ordinaires :* les autres s'appellent *points transcendants essentiels.* Si le domaine d'indétermination comprend tout le plan, le point est dit point d'*indétermination complète.* Dans le cas contraire, on dit qu'on a un point d'*indétermination incomplète.*

Bien entendu, il est nécessaire, pour que les locutions précédentes aient un intérêt, de montrer que ces différents cas peuvent se présenter. C'est ce que je vais faire.

D'abord, pour avoir un exemple de point ordinaire, considérons la fonction $w = \log z$ et le point singulier $z = 0$. Quand z décrit le cercle $|z| < r$, on a, en posant

$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad w = \log \rho + i(\theta + 2k\pi),$$

k prenant toutes les valeurs entières : l'ensemble F est l'ensemble des points du plan w à gauche de la droite $x = \log r$ $(w = x + iy)$. Ce domaine F se réduit au point à l'infini quand r tend vers zéro : le point $z = 0$ est donc transcendant ordinaire.

Pour donner un exemple de point d'indétermination incomplète, considérons avec M. Painlevé la fonction

$$w = (\log z)^i$$

et le point singulier $z = 0$. Posons $z = re^{i\theta}$, donc

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) ;$$

l'échange des différentes branches du logarithme s'effectuant par un circuit fermé autour de $z = 0$, toutes sont à considérer. Ainsi n est un entier quelconque. Alors on a

$$w = (\log z)^i = e^{i \log \log z}.$$

Or

$$\log \log z = \log \sqrt{\log^2 r + (\theta + 2n\pi)^2} + i\left(\text{arc tang} \frac{\theta + 2n\pi}{\log r} + 2n'\pi\right).$$

l'arc tangente étant celui dont le cosinus a le signe de $\log r$ (puisque r est petit, ce signe est négatif). Nous aurons donc

$$i \log \log z = -\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{\theta+2n\pi}{\log r} + 2n'\pi\right) + i \log \sqrt{\log^2 r + (\theta+2n\pi)^2} = \alpha + i\beta$$

et $w = e^{\alpha+i\beta}$.

Le module de w est e^{α}, son argument est β. Cherchons le lieu des points w quand r prend toutes les valeurs de zéro à une valeur très petite ρ. Le module, e^{α}, est égal à

$$e^{-2n'\pi} \cdot e^{-\operatorname{arc\,tang} \frac{\theta+2n\pi}{\log r}}.$$

Supposons que nous ayons pris pour l'arc tangente celui qui est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

D'autre part, n' a une valeur fixe, car l'échange de deux branches de $\log \log z$ ne se fait qu'autour du point $\log z = 0$ ou $z = 1$; or nous supposons ρ très petit. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait pris $n' = 0$. Alors e^{α} prend toutes les valeurs entre $e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $e^{-\frac{3\pi}{2}}$. Quant à l'argument β, il devient infini; donc le domaine F comprend tous les points de la couronne comprise entre les cercles de rayons $e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $e^{-\frac{3\pi}{2}}$. Le domaine F est invariable ; son domaine limite, c'est-à-dire le domaine d'indétermination, est la même couronne.

Formons maintenant un exemple de fonction dont le domaine d'indétermination soit une ligne. Soit $g(x)$ une fonction uniforme admettant pour ligne singulière la parabole cubique

$$y^2 = x^3 \quad (z = x + yi),$$

et supposons cette fonction continue sur sa coupure et égale à 1 pour $z = 0$ par exemple; il est bien facile de former une telle fonction. Je la supposerai exister à l'intérieur de sa coupure, c'est-à-dire dans la partie du plan qui contient l'axe réel positif. Posons

$$w(z) = g(z)\, z^i ;$$

si on a $z = re^{i\theta}$, on a aussi

$$z^i = e^{i \log z} = e^{i(\log r + i(\theta + 2n\pi))} = e^{-(\theta + 2n\pi)}\, e^{i \log r}.$$

Mais n doit être supposé posséder une valeur fixe, car, pour la la fonction $w(z)$, le prolongement analytique ne peut se faire sur un circuit *entourant* $z = 0$; donc l'échange des branches du logarithme est devenu impossible : la fonction est rendue artificiellement uniforme. Supposons $n = 0$ et θ compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Cherchons le domaine d'indétermination relatif au point $z = 0$. La portion du domaine d'existence de la fonction intérieure à un cercle de rayon ρ très petit ne renferme que des points pour lesquels l'argument est voisin de zéro; le module de z^i est pour tous ces points voisin de 1 ; l'argument, $\log r$, devient aussi grand qu'on veut en valeur absolue; comme $g(z)$ est voisin de 1 ces conclusions sont valables pour $w(z)$. Le domaine F est très voisin de la circonférence de rayon 1 : le domaine d'indétermination se compose donc de cette circonférence.

Enfin, je puis me dispenser de donner des exemples de point d'indétermination complète, car nous en trouverons dans la suite un grand nombre ([1]).

Si précise et si intéressante que soit la notion de domaine d'indétermination, examinons, en la creusant davantage, si elle s'applique à tous les points singuliers. Elle exige l'existence d'un chemin L tendant vers a où w soit régulière. Or, il peut très bien se faire, et même pour une fonction uniforme, que pour certains points singuliers un tel chemin n'existe pas.

Considérons, par exemple, un ensemble parfait non dense sur le segment $0 - 1$ de l'axe des x, et l'ensemble E des droites de longueur 1 perpendiculaires à Ox en ces points. Cet ensemble est fermé. Il existe donc des fonctions analytiques l'admettant pour ensemble singulier, et, comme les points du plan n'appartenant pas à E forment un domaine d'un seul tenant, la même fonction a tous les points de E pour points singuliers. Parmi les droites E, il y en a une infinité dénombrable dont on peut atteindre les points par un chemin régulier, et une infinité non dénombrable pour les points desquelles il n'en est rien : soit a un point d'une de ces dernières droites : on pourra prolonger la fonction le long d'un chemin qui tend bien vers a, mais pas exclusivement vers a.

([1]) On trouvera d'autres exemples d'un caractère tout différent dans la Note de M. Denjoy, *Comptes rendus*, 26 juillet 1909.

A vrai dire, cette restriction n'a pas d'importance, car l'expression : allure de la fonction au voisinage d'un point singulier n'a plus de sens pour un tel point ; il n'y a donc pas lieu de définir dans ce cas un domaine d'indétermination. Si j'en parle ici, ce n'est qu'au point de vue de la classification des singularités : la notion de domaine d'indétermination ne prévoit pas tous les cas. On peut dire que les points singuliers de ce genre sont *indirectement* singuliers.

Voyons maintenant si le domaine d'indétermination est bien défini dès qu'on connaît le point singulier. Évidemment non. Pour une fonction multiforme, la branche de fonction choisie influe naturellement sur ce domaine. Si plusieurs branches admettent un même point singulier, les domaines d'indétermination correspondants seront différents en général.

Le choix du chemin initial appelé L dans ce qui précède a-t-il aussi une influence ? *A priori*, il peut sembler que non, puisqu'on prolonge la branche initiale tout autour du point singulier. Cependant la réponse est affirmative. Il suffit pour s'en convaincre de considérer une fonction uniforme, et un point singulier a appartenant à une coupure non fermée. Suivant que le chemin L aboutit au point a d'un côté ou de l'autre de la coupure, il n'y a évidemment aucune raison pour que le domaine d'indétermination soit le même. Au fond, il y a au point a deux points singuliers distincts en tant que points singuliers, quoiqu'ayant les mêmes coordonnées.

Il n'était pas inutile de donner ces quelques explications, qui, bien entendu, ne diminuent en rien l'intérêt de la définition du domaine d'indétermination.

Le prolongement analytique généralisé.

J'ai déjà signalé au début comment M. Borel était parvenu à une généralisation logiquement inattaquable de la notion de fonction analytique. Je ne développe pas ici cette question, pas plus que les arguments que M. Poincaré avait opposés *a priori* à des tentatives de ce genre [1]. Je me borne à indiquer que ce sont

---

(1) *American Journal of mathematics*, t. XIV, et Thèse de M. Borel.

des développements analogues à ceux obtenus page 44 qui, représentant, nous l'avons vu, plusieurs fonctions analytiques, semblent établir entre celles-ci un lien.

Une généralisation importante et commode a été indiquée aussi par M. Poincaré dans son Mémoire sur l'uniformisation des fonctions analytiques; j'avais déjà utilisé dans ma Thèse des considérations analogues. Il s'agit de ranger par un artifice les pôles et les points critiques algébriques au nombre des points réguliers, de façon que les seuls points véritablement singuliers soient les points transcendants.

Il suffit pour cela de remarquer qu'en un pôle, z_0, la fonction admet un développement convergent suivant les puissances de $(z - z_0)^{-1}$: le cercle dans lequel ce développement converge est un cercle de méromorphie qu'on peut substituer au cercle d'holomorphie ordinaire.

De même, en un point critique algébrique z_0, nous aurons un développement convergent suivant les puissances de $(z - z_0)^{\frac{1}{m}}$; dans le cercle de convergence de ce développement, la fonction est algébroïde. Nous substituerons encore ce cercle au cercle d'holomorphie.

En d'autres termes, on peut reprendre tout ce que nous avons dit au début, en désignant maintenant par $\mathfrak{P}(z - z_0)$ un développement suivant certaines puissances fractionnaires, positives ou négatives de $z - z_0$: les propriétés essentielles des séries entières sont encore vérifiées, et, par suite, on peut répéter mot pour mot le raisonnement de Weierstrass.

Quand nous prolongerons une fonction le long d'un chemin quelconque, si ce chemin vient à passer par un pôle, nous adopterons au delà du pôle la valeur bien déterminée de la fonction qu'on aurait obtenue en contournant de très près le pôle; et quand notre chemin passera par un point critique, nous adopterons au delà du point, pour la fonction, n'importe laquelle des m valeurs qui s'échangent avec la valeur initiale dans un petit cercle entourant le point critique.

Cette généralisation, qui n'est pas essentielle, donne plus de souplesse à la notion de fonction analytique.

Le théorème de M. Poincaré.

Je ne veux pas quitter ces généralités sans dire quelques mots du théorème capital de M. Poincaré sur l'uniformisation des fonctions analytiques.

M. Poincaré démontre qu'étant donnée une fonction analytique

$$(1) \qquad w = f(z),$$

on peut trouver une variable t, telle que z et w soient des fonctions uniformes de t :

$$(2) \qquad \begin{cases} w = \varphi(t), \\ z = \psi(t). \end{cases}$$

Je ne reproduis pas ici sa démonstration, basée sur le potentiel logarithmique et la méthode du balayage. Je me borne à expliquer avec précision ce qu'on exprime en disant que l'ensemble de formules (2) représente *totalement* et *exclusivement* la correspondance (1).

Essayons pour cela de prendre le théorème inverse. On donne deux fonctions uniformes de t (2) : est-ce que la première est une fonction analytique de la seconde ? [1]. Cet énoncé est un peu vague, et l'on peut le préciser de plusieurs façons.

La façon la plus simple est certainement la suivante : soit t_0 une valeur de t pour laquelle w et z prennent les valeurs w_0 et z_0, et supposons qu'au voisinage de $t = t_0$, w et z soient développables en séries de Taylor. Pour $z = z_0$, la fonction w prend (entre autres) la valeur w_0 ; la fonction w est-elle développable en série de Taylor suivant les puissances de $z - z_0$? La réponse est très simple : il suffit pour cela que la fonction inverse $t = \theta(z)$, définie par $z = \psi(t)$, soit elle-même développable suivant les puissances de $z - z_0$. C'est bien ce qui a lieu en général ; il y a exception si $\left(\frac{dt}{dz}\right)_0$ n'existe pas, c'est-à-dire si $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0$, c'est-à-dire si le développement de z

---

[1] *Voir* Burckhardt, *Einführung in die Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, 2e édition.

commence par une puissance de $t - t_0$ supérieure à la première, et encore obtient-on dans ce cas un développement convergent soit de t, soit de w suivant les puissances fractionnaires de $z - z_0$.

Ceci est bien élémentaire, et si je l'indique c'est pour bien faire ressortir la différence de ce point de vue (local) avec le suivant (weierstrassien), qui est la véritable façon de concevoir les choses :

Donnons à z une valeur z_0 pour laquelle $t(z)$ soit analytique ainsi que $w(t)$. D'après ce qui précède, on peut alors calculer w et toutes ses dérivées par rapport à z pour $z = z_0$ et former avec elles un développement convergent. Au sens de Weierstrass, nous définissons ainsi par cet ensemble dénombrable de valeurs

$$(w_0, w'_0, w''_0, \ldots)$$

une fonction analytique par prolongement analytique. *Y a-t-il identité entre cette fonction et l'ensemble de formules* (2) ?

Cette question en renferme deux très précises :

1° Supposons qu'en prolongeant analytiquement la fonction précédente $w(z)$ jusqu'au point z_1, on obtienne la valeur w_1. *Existe-t-il une valeur de t telle que, pour cette valeur, φ prenne la valeur w_1, et ψ la valeur z_1 ?*

2° Soit au contraire t_1 un point régulier des deux fonctions φ et ψ, et supposons que $\varphi(t_1) = w_1$ et $\psi(t_1) = z_1$. *Parmi les chemins en nombre infini qui joignent z_0 et z_1, y en a-t-il un tel que le prolongement de $w(z)$ le long de ce chemin conduise à la valeur finale $w(z_1) = w_1$?*

C'est évidemment au dernier point de vue que se place M. Poincaré dans l'énoncé de son théorème. Or, il est facile de comprendre (et de montrer si l'on veut par des exemples) que, si l'on se donne au hasard les fonctions φ et ψ, les questions précédentes peuvent recevoir une réponse négative. Les fonctions φ et ψ que détermine M. Poincaré sont donc particulières.

Comment d'abord la chose pourra-t-elle se produire pour la première circonstance? Il faut pour cela qu'en poursuivant w le long du chemin l (plan des z), on tombe, avant d'arriver à z_1, sur un point ζ pour lequel la fonction $\theta(z)$ cesse d'être analytique, ou encore pour lequel la fonction $\theta(z)$ prenne une valeur t, point singulier de la fonction w. Si d'ailleurs, par une modification

légère de l, on peut éviter de tels points ζ, il n'y a pas de circonstance exceptionnelle; le seul cas qui puisse être exceptionnel est donc celui où soit la fonction $\theta(z)$, soit la fonction $w(t)$ présentent des coupures ([1]).

Étudions de même la seconde circonstance exceptionnelle. Tout se réduit à la question suivante : peut-on trouver un chemin joignant z_0 à z_1, le long duquel $\theta(z)$ passe régulièrement de la valeur t_0 à la valeur t_1, en prenant des valeurs pour lesquelles $w(t)$ ne cesse pas d'être régulière? Puisque, par hypothèse, la fonction uniforme $\psi(t)$ existe pour t_0 et t_1, et y prend les valeurs z_0 et z_1, c'est qu'on peut joindre t_1 et t_0 par un chemin le long duquel, naturellement, z passera de z_0 à z_1, suivant un chemin continu du plan des z; et si, inversement, on fait décrire à z ce chemin, t pourra s'y prolonger analytiquement et passer de t_0 à t_1 (en admettant les prolongements analytiques généralisés au delà des pôles ou points critiques algébriques). C'est donc simplement lorsque $w(t)$ n'est pas régulière pour ces valeurs de t que la circonstance prévue peut se présenter. Et si, par une déformation légère du chemin $t_0 t_1$, on peut éviter de tels points t, il n'y a pas de circonstance exceptionnelle : le cas exceptionnel ne peut donc se présenter que si $w(t)$ présente des coupures. Il n'est même certainement pas exceptionnel si $z(t)$ n'en présente pas aussi, car alors on peut aller de t_0 en t_1 par un chemin qui évite les coupures de $w(t)$ et qui soit régulier pour $z(t)$. En d'autres termes, il faut que les coupures de $w(t)$ et $z(t)$ se complètent de façon à séparer t_0 de t_1, c'est-à-dire de façon que leur somme morcelle le plan.

Supposons par exemple que la fonction $z = \psi(t)$ soit définie dans tout le plan et admette comme coupure l'axe réel positif et que la fonction $w = \varphi(t)$ définie aussi dans tout le plan admette pour coupure l'axe réel négatif. Prenons deux points t : t_0, t_1,

---

([1]) Soit par exemple une fonction uniforme $\varphi(t)$ à domaine d'existence borné et cette fonction étant elle-même bornée. Si nous prenons

$$(2) \qquad \begin{cases} w = \varphi(t), \\ z = \varphi(t), \end{cases}$$

la fonction $w = z$ qui résulte de l'élimination de t est plus générale que la correspondance (2).

l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe réel; joignons ces points par un chemin qui rencontre l'axe réel négatif; le long de ce chemin $z(t)$ est régulière et prend une série continue de valeurs. Si $w(z)$ était régulière pour ces valeurs, $w(t)$ serait régulière le long du premier chemin, ce qui est absurde. Donc, on rencontre un point singulier de $w(z)$ sur le chemin z dont je viens de parler. Tout chemin joignant dans le plan de z les points $z(t_0)$ et $z(t_1)$ rencontrera de même un point singulier de $w(z)$.

Ces explications, qui devaient être données, montrent bien que ce sont les fonctions à lignes singulières qui sont les moins maniables de toutes, et qui introduisent le plus de complications. La suite ne fera que confirmer cette remarque.

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS ENTIÈRES.

Le théorème de Liouville-Weierstrass.

Le premier résultat relatif à l'allure d'une fonction *uniforme* au voisinage d'un point singulier est le théorème énoncé par Liouville :

Une série entière convergente dans tout le plan ne saurait être bornée sans se réduire à une constante.

Une série entière convergente dans tout le plan est, pour nous, une fonction analytique admettant un seul point singulier : le point à l'infini. Le théorème précédent signifie donc qu'au voisinage d'un tel point la fonction ne peut être bornée.

Le théorème fondamental énoncé par Weierstrass doit être considéré comme une forme plus générale du même théorème. L'énoncé est le suivant :

Si une fonction uniforme admet un seul point singulier non polaire, au voisinage de ce point, elle s'approche autant qu'on veut de toute valeur donnée.

Je laisse de côté la démonstration classique de ce théorème au moyen du théorème de Liouville. Elle consiste à ramener par deux transformations homographiques des plans z et w les points à l'infini au point singulier donné (plan des z), d'une part, et à la valeur donnée (plan des w), d'autre part. La notion de domaine d'indétermination donne une nouvelle forme à l'énoncé. Traçons un cercle autour du point essentiel donné, a (à distance finie ou non); l'ensemble des valeurs prises par la fonction $w = f(z)$ dans ce cercle, ensemble auquel on ajoute son dérivé, comprend tout

le plan w. Quand le rayon du cercle tend vers zéro, l'ensemble limite comprend tout le plan; un point singulier isolé est donc un point d'indétermination complète de la fonction.

Je me propose de donner du théorème de Weierstrass une démonstration reposant uniquement sur la notion du prolongement analytique : la chose est intéressante en elle-même, et, de plus, nous nous trouverons conduits à certaines généralisations importantes dans les applications. Ce sera un exemple de raisonnement général sur la définition de Weierstrass, et cela nous montrera la propriété précédente sous un jour différent.

Je fais d'abord une remarque. Soit une fonction $w = f(z)$ analytique en un point z_0 et prenant en ce point la valeur w_0. Faisons décrire à z un domaine très petit admettant z_0 pour point intérieur (un cercle de centre z_0 par exemple), où w soit régulière. Marquons dans le plan w l'ensemble des valeurs prises par w. Je dis que c'est un domaine continu contenant w_0 à son *intérieur*. En effet, on peut écrire, au voisinage de z_0,

$$w - w_0 = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction non nulle pour $z = z_0$, et on peut supposer $z - z_0$ assez petit pour que, lorsque z décrira un contour fermé entourant z_0, l'argument de $\varphi(z)$ reprenne la même valeur. Comme

$$\arg(w - w_0) = n \arg(z - z_0) + \arg \varphi(z),$$

l'argument de $w - w_0$ augmentera de $2n\pi$ dans les mêmes conditions; par conséquent, w tournera autour de w_0.

Il en est de même si $z = z_0$ est point critique algébrique de w, car on a alors

$$w - w_0 = (z - z_0)^{\frac{1}{n}} \varphi(z),$$

$\varphi(z_0)$ étant différent de zéro. En faisant décrire à z une petite courbe tournant n fois autour de z_0, w tournera une fois autour de w_0.

En d'autres termes, si l'on fait varier z dans un domaine D quelconque de son plan, et si l'on marque l'ensemble des valeurs prises par w dans le plan w, on trouvera un domaine dont les points frontières ne peuvent provenir que soit des points frontières de D, soit des points singuliers *transcendants* de $w(z)$ situés dans D.

Arrivons au théorème en question. Pour démontrer qu'une fonction $w(z)$, qui admet en un point z_0 un point transcendant isolé, s'approche autant qu'on veut au voisinage de ce point de la valeur a, il suffit de démontrer que la fonction $u = \frac{1}{w - a}$ ne saurait être *bornée* au voisinage de z_0. Considérons un contour C entourant z_0 et ne renfermant que ce point singulier. Déformons ce contour et faisons-lui occuper une position C′ renfermant C à son intérieur. Soit x un point entre C et C′; on a

$$u(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{u(z)\,dz}{z - x} - \frac{1}{2i\pi}\int_{C} \frac{u(z)\,dz}{z - x},$$

les intégrales étant prises dans le sens direct, ou

$$u(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

La fonction φ est holomorphe à l'intérieur de C′, donc en z_0. La fonction ψ est holomorphe à l'extérieur de C; comme elle ne peut avoir que les singularités de u, c'est donc une fonction qui n'a pas d'autre point singulier que z_0 (à distance finie ou infinie). Comme $\varphi(x)$ est bornée en z_0, tout revient à démontrer que $\psi(x)$ ne l'est pas, c'est-à-dire que le théorème sera acquis pour une fonction au voisinage d'un point isolé dès qu'il sera établi pour une fonction n'admettant pas d'autre singularité qu'un point isolé (une fonction entière). Nous retombons sur l'énoncé de Liouville.

Soit donc une fonction analytique uniforme, $w(z)$, admettant un seul point transcendant $z_0 = 0$, par exemple, et supposons-la bornée. L'ensemble des valeurs prises par la fonction w donne dans le plan w un domaine qui ne s'étend pas à l'infini, et qui par suite admet une frontière. Considérons la fonction inverse $z(w)$. Ses points singuliers sont des points critiques algébriques et des points transcendants. En l'un de ces points transcendants, w_0, le domaine d'indétermination ne peut comprendre aucun point régulier z_1 de $w(z)$, car on aurait $w(z_1) = w_0$ et w_0 serait régulier ou critique algébrique. Donc le domaine d'indétermination se réduit au point $z_0 = 0$.

On peut donc dire que la fonction $z(w)$ s'annule en tous ses points transcendants, et ceci nous amène à nous poser la question suivante :

Soit une fonction multiforme à domaine d'existence borné (ou plus simplement pourvue de singularités continues); je dis que, si cette fonction n'admet comme points transcendants que des points ordinaires en chacun desquels elle prend la valeur zéro, (la même valeur) elle est identiquement nulle (constante).

Distinguons deux cas suivant que la fonction $z(w)$ est ou non bornée (dans le cas particulier qui nous a conduit à l'énoncé précédent, elle n'est pas bornée).

Dans le premier cas, l'ensemble des points z est un continuum borné : or ses points frontières ne peuvent provenir ni d'un point régulier ni d'un point critique de $z(w)$, mais uniquement, d'un point transcendant; donc z est nul identiquement puisque cette frontière doit se réduire au point $z = 0$.

Dans le cas où la fonction n'est pas bornée, excluons de son domaine d'existence l'ensemble des points w où son module dépasse un nombre donné R. (Il peut se faire, bien entendu, que pour les points w enlevés, certaines branches soient en valeur absolue supérieures, d'autres inférieures à R.) En tous cas, l'ensemble des points enlevés forme des aires, et, d'autre part, toute la frontière L du domaine d'existence ne sera pas enlevée, car toutes les branches qui peuvent être prolongées jusqu'en un point de L s'y annulent. Donc il doit forcément rester toute une aire S attenante à L (1). Effectuons alors deux rotations autour de deux points de L : on peut choisir les angles de ces rotations de façon que la portion commune à l'aire S et aux deux aires dérivées, S_1 et S_2, soit une aire limitée uniquement par des points de L et de ses dérivés. En désignant par α_1, α_2 les angles de rotation, par β_1, β_2 les points choisis comme centres, cela revient à poser

$$w_1 - \beta_1 = (w - \beta_1) e^{i\alpha_1},$$
$$w_2 - \beta_2 = (w - \beta_2) e^{i\alpha_2};$$

(1) A vrai dire, il faut démontrer que la fonction, qui est nulle en tous ses points singuliers, tend *uniformément* vers zéro quand on se rapproche d'un de ces points : c'est ce qu'il est facile de faire (voir, par exemple, dans ma Thèse). Si l'on ne démontrait pas ce point, il pourrait se faire que les aires enlevées aient la frontière L pour ligne limite, et la bande S n'existerait pas nécessairement.

les fonctions $z(w_1)$ et $z(w_2)$ deviennent des fonctions de w :

$$z_1(w) \quad \text{et} \quad z_2(w).$$

Nous définirons dans l'aire commune Σ à S, S_1, S_2 les trois fonctions z, z_1 et z_2 au moyen d'une quelconque de leurs valeurs initiales. La fonction

$$Z(w) = z(w)\, z_1(w)\, z_2(w)$$

pourra donc être prolongée analytiquement, et l'on ne pourra évidemment pas sortir de Σ, puisque tout point frontière de Σ est singulier pour une au moins des trois fonctions. La fonction Z a donc un domaine d'existence borné (peut-être plus petit que Σ); elle est bornée, et elle est nulle en tous ses points transcendants (puisque l'un des facteurs s'y annule pendant que les autres sont bornés). D'après le premier cas, elle est donc nulle identiquement; donc l'une des fonctions z, z_1 ou z_2 est nulle identiquement dans une aire et par suite dans tout son domaine d'existence : les trois fonctions sont donc identiquement nulles.

Il n'y a aucune difficulté à traiter le cas où la fonction $z(w)$ prendrait en ses points transcendants, tous ordinaires, un nombre fini de valeurs distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_p$, car la fonction

$$Z(w) = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_p)$$

prendrait la valeur zéro en tous ses points transcendants. Il en est de même si $z(w)$ prenait une infinité dénombrable de valeurs a_n ayant une seule valeur limite, qu'on peut supposer être l'infini, car la fonction

$$Z(w) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P\left(\frac{z}{a_n}\right)}$$

serait encore nulle en tous ses points singuliers. On aperçoit tout de suite un grand nombre de généralisations faciles, et je n'y insiste pas.

Le théorème de M. Picard.

Je ne veux pas non plus m'étendre longuement sur le théorème de M. Picard, qui a été déjà étudié dans cette collection, et je me place simplement pour en dire quelques mots au point de vue de

Weierstrass. Peut-on démontrer le théorème de M. Picard par une méthode directe analogue à celle qui précède?

Je rappelle d'abord l'énoncé, qui est le suivant : *Une fonction qui admet un point pour point essentiel isolé prend au voisinage de ce point, et une infinité de fois chacune, toutes les valeurs possibles, sauf deux au plus (l'infini compris).*

La démonstration de M. Picard tient en quelques lignes. La démonstration directe donnée par M. Borel en 1896 est plus compliquée. Si l'on veut déduire la démonstration de la théorie du prolongement analytique, c'est naturellement à l'étude des singularités de la fonction inverse $z(w)$ qu'il faudra s'attacher. Et c'est ce qui permet d'affirmer que le théorème de M. Picard ne doit pas pouvoir, au moins actuellement, être démontré ainsi (¹) : en effet, si les valeurs *exceptionnelles* (c'est-à-dire que w ne prend pas au voisinage du point essentiel) fournissent certainement des points singuliers de la fonction $z(w)$, *cette fonction peut avoir, et a en effet d'autres points transcendants,* comme je le montrerai plus loin (*voir* p. 104 et suivantes) ; et la distinction paraît assez subtile entre ces différents points singuliers qui sont les uns et les autres transcendants *ordinaires.*

On sait quelle direction ont prise à la suite du Mémoire de M. Poincaré (²) les recherches sur les fonctions entières. Elles rentrent bien dans le cadre de cet Ouvrage, puisqu'il s'agit en somme de préciser de plus en plus l'allure de la fonction au voisinage d'un point singulier isolé ; mais, vu leur développement, et étant donné d'une part que certains des Ouvrages de cette Collection s'occupent spécialement de ces questions (³), d'autre part que les méthodes utilisées jusqu'ici ne ressemblent en rien à

(¹) Cela ne fait qu'augmenter son importance. Le théorème de M. Picard réalise une approximation tellement grande des propriétés d'une fonction entière, qu'il établit entre les points transcendants de la fonction inverse des nuances qui nous échappent encore dans l'état actuel de la théorie des fonctions. Je rappelle qu'il date de 1880. Je ne veux pas abandonner ce sujet sans signaler l'important Mémoire de M. Lindelöf (*Congrès des Mathématiques*, Stockholm, 1909) sur le théorème de M. Picard.

(²) *Bulletin de la Société Mathématique*, 1883.

(³) E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières, sur les fonctions méromorphes, sur la croissance.* — O. Blumenthal, *Sur les fonctions de genre infini.*

celles employées dans ce Livre, je ne veux pas m'y étendre davantage, sauf pour préciser le point où en est la théorie. On a aujourd'hui des renseignements très précis sur les relations entre la croissance et la densité des zéros d'une fonction entière, c'est-à-dire entre le nombre des branches de la fonction inverse et la façon dont la fonction tend vers une de ses valeurs exceptionnelles. Cette étude, qui n'a porté pendant longtemps que sur les modules (des zéros ou de la fonction), se précise encore par l'intervention des arguments. Enfin, toute la théorie se rajeunit par l'étude nouvelle dont je parlerai plus loin, à sa place (*voir* p. 100), de l'indétermination *dans une direction* d'une fonction entière.

Il est très facile de généraliser les résultats relatifs aux fonctions entières pour une fonction qui admet un nombre fini de points essentiels ou pour une fonction qui admet un point essentiel isolé avec d'autres singularités quelconques qui n'ont pas pour point limite le point donné. M. Maillet s'est longuement étendu sur ces généralisations dans plusieurs Mémoires (¹). Je signale également l'extension, moins évidente, faite par M. Rémoundos (²) du théorème de M. Picard à certaines fonctions multiformes du type suivant. Il démontre que l'équation

$$\sum_{n} \varphi_n(u) A_n(z) = 0,$$

où les φ et les A sont des fonctions entières, définit une fonction multiforme $u(z)$ qui a une infinité dénombrable de valeurs exceptionnelles. Plus spécialement, l'équation

$$\sum_{n=0}^{n=p} u^n A_n(z) = 0$$

définit une fonction $u(z)$ qui a $2p$ valeurs exceptionnelles au plus, à moins qu'elle ne soit algébrique.

Revenons au théorème de Weierstrass et demandons-nous s'il n'est pas susceptible d'extension à des points singuliers non

---

(¹) *Annales de Toulouse*, 1902; *Journal de M. Jordan*, 1902; *Bulletin de la Société Mathématique*, 1903.

(²) *Annales de Toulouse*, t. XIX.

isolés. Il est facile d'établir le théorème suivant : *Si on a une infinité de points singuliers, a, d'une fonction (uniforme) $w = f(z)$ en chacun desquels le domaine d'indétermination est un domaine* D, *si les points a ont un point limite, b, le domaine d'indétermination en b comprend au moins tous les points qui sont limites de tous les* D.

En effet, dans un cercle entourant *b*, il y a des points *a intérieurs*. Par suite, l'ensemble des valeurs w prises par la fonction dans le cercle comprend le domaine d'indétermination de ces points *a*.

En particulier, un point limite de points d'indétermination complète est lui-même point d'indétermination complète. Pour qu'un point soit tel, il suffit donc qu'on puisse trouver une file (dénombrable) de points *isolés* ayant le point donné pour point limite.

Naturellement il peut se faire qu'un point *a* appartienne à une coupure, à un ensemble quelconque de points singuliers, et que la condition précédente soit remplie. On voit donc que le théorème de Weierstrass s'applique dans un grand nombre de cas.

Supposons que, dans une aire A, une fonction uniforme admette un ensemble dénombrable de points singuliers. Cet ensemble renferme des points isolés, car sans cela il serait dense en lui-même, et, comme il est fermé, il serait parfait, c'est-à-dire non dénombrable. Donc, dans l'aire en question, la fonction présente des points d'indétermination complète.

Un point *a* sera donc certainement point d'indétermination complète si l'on peut l'entourer d'une aire (dont il peut même être point frontière) à l'intérieur de laquelle il n'y ait qu'un ensemble dénombrable de points singuliers tendant vers *a*; car, en diminuant l'aire, elle ne cessera pas de contenir un ensemble dénombrable de points singuliers : le point *a* sera donc limite de points d'indétermination complète.

Je dirai en abrégé, pour caractériser ces cas, que le point *a* est limite d'un ensemble dénombrable de points singuliers.

Le seul cas qui reste donc à étudier est celui où, dans une aire quelconque attenante à *a*, il y a toujours un ensemble *non dénombrable* de points singuliers. Les circonstances sont bien différentes suivant que cet ensemble est discontinu ou continu.

CHAPITRE IV.

LES ENSEMBLES PARFAITS DISCONTINUS DE SINGULARITÉS.

La classification du début nous conduit maintenant à étudier le cas d'un ensemble partout discontinu de points singuliers, ou encore le cas d'un point singulier *appartenant* à un ensemble discontinu; le sens de ces mots a été précisé (*voir* p. 53). Ce cas est intermédiaire entre celui du point isolé (et les cas qui s'y rattachent) et celui de la coupure. Pendant de nombreuses années on l'a cependant laissé entièrement de côté, et les quelques études qu'on en a faites sont très loin d'apporter une lumière définitive sur la question. Un historique de ces études me semble nécessaire, et je vais le faire brièvement.

Tout d'abord, il est bien naturel de se demander si, outre l'intérêt de la question en elle-même, elle n'a pas d'importance dans les applications, si ces études ont été ou non rendues indispensables pour la résolution d'autres questions. Or, à ce point de vue, la question s'est posée naturellement tout au début des travaux de Weierstrass. Les travaux de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes sont en effet presque contemporains de la définition de la fonction analytique, et toute une catégorie de fonctions fuchsiennes possède justement un ensemble discontinu de points singuliers. Tout récemment encore, M. Fatou [1] a indiqué l'existence de telles singularités dans la résolution d'une équation fonctionnelle dont M. Kœnigs s'était déjà occupé en 1884. Quand bien même, d'ailleurs, on n'aurait pas rencontré de telles fonctions, leur étude ne s'en imposerait pas moins, à un autre point de vue : quand on étudie une catégorie de fonctions définies par un procédé analytique déterminé, on ne connaît pas à l'avance la généralité de la solution; à son sujet toutes les hypothèses sont

[1] *Comptes rendus*, t. CXLIII, 1906, p. 746.

permises, et, soit pour montrer que telle hypothèse ne se présente pas, soit pour voir dans quel cas elle se présente, des théorèmes généraux caractéristiques de ces hypothèses sont nécessaires. Ce sont justement les travaux de M. Painlevé sur les solutions à points critiques fixes des équations différentielles qui l'ont amené à élucider le premier les cas singuliers auxquels conduit la définition de la fonction analytique. Précisément, il se trouve qu'une question importante relative aux solutions d'une équation du premier ordre qui admettent un nombre borné de branches reste en suspens, car sa solution exigerait soit l'exactitude d'un théorème sur les ensembles discontinus, qui, nous allons le voir, n'est pas exact, soit un autre théorème sur les fonctions multiformes, dont un cas particulier est étudié à la fin de ce Livre, qui est loin d'être démontré, et qui n'est peut-être pas exact ([1]).

C'est M. Painlevé qui s'est donc le premier demandé s'il y avait, dans le cas d'un ensemble discontinu, à espérer un théorème général sur l'allure de la fonction, et notamment si le théorème de Liouville-Weierstrass s'étendait à ce cas. La méthode qu'il devait sembler tout naturel de suivre au début était basée sur l'intégrale de Cauchy. Essayons de l'appliquer, en ne faisant des hypothèses qu'au moment où elles deviendront nécessaires.

Soit a le point donné appartenant à un ensemble discontinu. D'après le raisonnement déjà fait (p. 71), tout revient à démontrer que la fonction $f(z)$ ne saurait être bornée dans le voisinage de a. Supposons qu'elle le soit. Entourons a d'un contour C intérieur à un cercle de centre a et de rayon aussi petit qu'on veut et ne contenant aucun point de E, ce qui est possible comme on l'a vu plus haut. Déformons C de façon à lui faire occuper une position C′ renfermant C à son intérieur et cela sans jamais rencontrer de point de E, et soit x un point quelconque situé entre C et C′. On aura, d'après le théorème de Cauchy,

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_{C} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \varphi(x) - \psi(x).$$

([1]) *Voir* la Note de M. Painlevé à la fin de l'Ouvrage de M. P. Boutroux: *Leçons sur les fonctions définies par une équation différentielle du premier ordre* (cette Collection, Paris, 1908).

La fonction $\varphi(x)$ admet les points singuliers de f qui sont hors de C′ et pas d'autres : elle est holomorphe à l'intérieur de C. La fonction $\psi(x)$ est holomorphe à l'extérieur de C (jusqu'à l'infini). Si nous substituons au contour C un certain nombre d'autres contours tels que tous les points singuliers intérieurs à C se trouvent enfermés dans l'un d'eux, et si nous calculons la seconde intégrale le long de cet ensemble de courbes, comme cela ne modifiera ni $f(x)$ ni $\varphi(x)$, cela laissera aussi invariable la fonction $\psi(x)$. Supposons alors que pour un choix convenable de ces contours on puisse faire en sorte que la somme de leurs longueurs soit inférieure à tout nombre donné, je dis qu'il est impossible de supposer $f(z)$ bornée.

En effet, supposons que dans le contour C primitif on ait $|f(z)| < M$. Le point x n'étant pas sur C, la distance $|z-x|$ est supérieure à un certain nombre δ lorsque, x étant fixe, z décrit C (δ est l'écart de x à C); on aura donc, en désignant par L la longueur de C ou la somme des longueurs des contours substitués à C,

$$\left|\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x}\right| < \frac{ML}{\delta}$$

et

$$|\psi(x)| < \frac{ML}{2\pi\delta}.$$

Si donc L peut être rendu inférieur à tout nombre donné, il en est de même de $\frac{ML}{2\pi\delta}$, et par suite le nombre *constant* (pour x fixe), $\psi(x)$, est nul. La fonction $\psi(x)$ nulle dans une aire est donc nulle dans tout le plan, et l'on a

$$f(x) = \varphi(x)$$

pour tout point x situé entre C et C′ et par conséquent dans tout le plan. Donc $f(z)$ est holomorphe en a, puisque $\varphi(z)$ l'est. D'où la contradiction.

La démonstration, qui est due à M. Painlevé, s'applique toutes les fois qu'on peut trouver une aire contenant a telle qu'on puisse enfermer tous les points singuliers qui lui sont intérieurs dans des contours dont la somme des longueurs est infiniment petite. M. Painlevé appelle *ensemble ponctuel* un ensemble jouissant de

cette propriété. Mais il est évident que c'est là un cas particulier et qu'il y a des ensembles discontinus qui ne sont pas ponctuels.

Essayons de voir ce qui se passe quand le choix des mêmes contours peut être fait de telle manière que la somme de leurs longueurs soit finie. M. Painlevé, qui a encore étudié ce cas, dit qu'on a alors un ensemble *semi-linéaire*. Il a démontré, très simplement on va le voir, que la fonction $f(z)$ ne peut dans ce cas être continue au point a, c'est-à-dire que a est un point transcendant essentiel.

Reprenons en effet l'égalité (1), qui est toujours valable.

Si la fonction $f(z)$ est continue au point a, on peut supposer C assez voisin de a (en tous ses points) pour que

$$|f(z)-f(a)|<\varepsilon,$$

quel que soit donné le nombre ε. Or on a

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-x}\,dz + f(a)\int_C \frac{dz}{z-x};$$

la dernière intégrale est égale à zéro, puisque le contour C, ou ceux qu'on lui substitue, ne tournent pas autour de x. En désignant toujours par L la longueur du contour C, ou la somme des longueurs des contours substitués dans la suite, on aura d'autre part

$$\left|\int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-x}\,dz\right| < \frac{\varepsilon L}{\delta},$$

et, puisque L est borné et que ε est arbitraire, on en conclut comme tout à l'heure que $\psi(x)$ est nulle pour tout point x entre C et C′ et par conséquent partout. Donc $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont égales partout, donc $f(z)$ est holomorphe en a.

Il est bien manifeste que cette méthode ne peut conduire à rien si l'hypothèse sur la longueur du contour n'est plus vérifiée, et d'autre part, comme cette hypothèse peut manifestement ne pas être vérifiée, nous n'avons pas encore un théorème général.

Il est manifeste aussi que ce n'est pas de méthodes de ce genre que nous pouvons espérer déduire un théorème général, s'il en existe un.

En y réfléchissant, on voit qu'on ne peut arriver à un théorème général qu'en revenant à la définition même de la fonction

analytique et en étudiant la fonction inverse de la fonction proposée, qui est une fonction à une infinité de branches. C'est ce que je vais me proposer de faire; mais je vais tout d'abord laisser de côté pour un instant l'ordre historique et étudier un cas particulier simple qui rendra plus accessible la démonstration générale.

Soit $w = f(z)$ une fonction uniforme n'ayant pour toutes singularités qu'un ensemble partout discontinu E (la fonction $\frac{1}{y}$ des raisonnements précédents), et *supposons que cette fonction soit non seulement continue en tout point de* E, *mais qu'elle prenne* de plus *en tous ces points une même valeur*, zéro par exemple. La fonction est supposée régulière à l'infini (nulle, si l'on veut). Marquons dans le plan w l'ensemble des valeurs prises par la fonction. La fonction w est bornée, car si elle ne l'était pas, en appliquant le raisonnement ordinaire par décomposition en carrés, on trouverait un point où elle devient infinie, un pôle si l'on veut, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, dans le plan w on obtient un ensemble continu de points à distance finie D, c'est-à-dire un continuum borné. Considérons la frontière L de ce continuum. Un point w de cette frontière ne peut correspondre à aucun point régulier de la fonction $f(z)$ (*voir* p. 70), donc il correspond à un point singulier; comme en de tels points w est nulle, la frontière se réduit au point $w = 0$ et la fonction est identiquement nulle ([1]).

Nous allons essayer, dans le cas général, de nous inspirer de ce qui précède, et nous allons revenir à la démonstration tentée par M. Painlevé dans ses Leçons de Stockholm.

Pour simplifier la question, mettons, en raisonnant comme page 78, la fonction donnée $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \varphi(z) + F(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans le contour C à l'intérieur duquel l'ensemble singulier de $f(z)$ est discontinu, et $F(z)$ étant holomorphe hors de C et admettant les seuls points singuliers de $f(z)$ dans C. Proposons-nous de démontrer que $f(z)$ approche dans le contour C

([1]) Un point frontière w correspond certainement à quelque point du plan des z, car il est limite de points intérieurs au domaine D qui correspondent à certains points du plan z, et la fonction f étant continue, pour tout point limite de ces points z, la fonction prend justement la valeur w.

autant qu'on veut de toute valeur donnée; si ce point était acquis, on en déduirait sans peine que tous les points singuliers sont points d'indétermination complète. Il suffit pour cela de démontrer que $f(z)$ ne peut pas être bornée dans C, car, pour démontrer que f approche de b, il suffit de montrer que $\frac{1}{f-b}$ grandit sans limite, et $\frac{1}{f-b}$ a les mêmes singularités que f. Ensuite, il suffit de démontrer que F ne peut pas être bornée, car F est bornée hors de C (on peut la supposer nulle à l'infini); si donc F n'est pas bornée, c'est dans C, et, comme φ est bornée dans C, c'est donc que f ne l'est pas.

Supposons donc F bornée dans tout le plan. Posons

$$w = F(z)$$

et étudions l'ensemble des points w quand z décrit son plan. Cet ensemble est continu et borné. C'est un continuum. Il admet donc une frontière L, ligne cantorienne fermée. On peut voir aisément (ce point sera établi dans le Chapitre VI) que les points singuliers de la fonction inverse $z(w)$ sont tous des points transcendants *ordinaires :* quand w tend vers un de ces points, z tend vers une valeur unique, savoir un des points singuliers de l'ensemble discontinu. Considérons une ligne régulière de la fonction $z(w)$ voisine d'un arc de L. Quand w décrit cette ligne, z prend un ensemble continu de valeurs, et, quand cette ligne tend vers L, ce continu variable a un continu limite; ce continu limite doit donc se réduire à un point, car il ne peut comprendre que des points singuliers de w. Soit z_0 ce point. On peut donc dire que sur la ligne L la fonction z est constante et prend la valeur z_0. Elle est donc réduite à une constante.

Cette démonstration, qui n'est pas tout à fait celle de M. Painlevé, ne pouvait guère paraître répréhensible à cette époque, sauf à son auteur, qui ne la donnait qu'avec une demi-conviction et essayait d'ailleurs d'ajouter quelques explications complémentaires (la forme était légèrement différente de celle ci-dessus). Mais, pour quiconque a lu seulement les deux premiers Chapitres de ce Livre, il apparaîtra d'une façon évidente que, soit au point de vue de la théorie des ensembles, soit au point de vue de la

notion de fonction analytique, la démonstration précédente est tout à fait insuffisante.

Mais, d'autre part, n'est-il pas permis de dire, *même aujourd'hui*, que cette démonstration doit tout au moins être regardée comme suffisante pour étayer la conviction que l'énoncé auquel on aboutit doit être exact, que pour le démontrer vraiment il n'y a qu'à reprendre avec la rigueur nécessaire les différents points de ce canevas?

De nombreux essais dans ce sens ont été tentés par M. Painlevé. Toujours quelque difficulté se présentait qui obligeait à laisser un point dans l'ombre. Le dernier point, notamment, savoir, le fait que la fonction z serait constante dès qu'elle l'est sur une ligne, paraît des plus difficiles à aborder. Laissons-le franchement de côté, et supposons qu'on ait pu en toute rigueur établir le reste de la démonstration; nous n'en aurons pas moins obtenu un résultat intéressant et important, savoir, que le point singulier z_0 n'est pas transcendant ordinaire, puisqu'en ce point w prend toutes les valeurs de l'ensemble L, c'est-à-dire une suite continue de valeurs. On en conclurait aisément que tout point singulier appartenant à un ensemble discontinu est transcendant essentiel ou limite de points essentiels (en prenant le contour C très petit autour du point qu'on veut étudier).

C'est ce dernier résultat que j'ai essayé de démontrer dans ma Thèse, après avoir en vain tenté de lever les difficultés qui avaient arrêté M. Painlevé dans la démonstration du théorème général sur l'indétermination complète. En tous cas, la conviction de M. Painlevé était faite et avait entraîné la mienne. Ma démonstration, qui avait été jugée correcte par M. Painlevé, n'échappait pas à certaines critiques se réduisant à ceci qu'elle faisait appel à l'intuition géométrique [1]; une démonstration d'un caractère purement arithmétique était désirable.

[1] Évidemment, il n'y a pas deux rigueurs : une démonstration est rigoureuse ou bien elle n'est pas une démonstration. Cependant, dans bien des raisonnements d'Analyse, on emploie le *langage* géométrique pour abréger; on attribue implicitement aux êtres dont on parle des propriétés que l'intuition nous suggère et qui ne sont démontrées qu'en Géométrie. Ce procédé expose naturellement à des erreurs, et on est en droit d'exiger des démonstrations de toutes les propriétés géométriques invoquées.

En tous cas, le théorème obtenu, et même le théorème général de Liouville-Weierstrass, ne faisaient de doute pour aucun de ceux qui s'occupaient, à cette époque, de cette question. Et cependant, comme nous allons le voir, *même le théorème sur la continuité était inexact.* Avant de le montrer par un exemple, je me propose de tirer de ce fait quelques conséquences.

Revenons à la démonstration-canevas et essayons de voir quelles parties de cette démonstration peuvent être établies en toute rigueur.

Le domaine des points w est certainement limité par une ligne, ce théorème est bien connu. Sa démonstration par M. Phragnien repose bien, elle aussi, sur l'intuition géométrique, mais il peut être établi en partant de la notion de nombre par voie purement logique. L'essentiel est ensuite d'arriver à l'existence d'une coupure, et d'abord de préciser le sens de ce mot. La démonstration de ce point dans ma Thèse est valable lorsqu'on admet l'existence de ce que j'appelle *des points d'arrêt.* Ce qui a été dit plus haut à ce sujet (p. 54–58) permet de nous faire une idée plus nette de la question. J'ai distingué les coupures en général, et les coupures pour une branche, les premières faciles à mettre en évidence dans un grand nombre de cas, avec peu d'hypothèses, les secondes plus délicates à trouver. Or, dans le cas actuel, il y a bien, et c'est facile à voir, coupure en général, mais l'existence d'un domaine borné ne permet pas de conclure à l'existence d'une coupure pour une branche. Or, la suite de la démonstration exige une telle coupure, car sans cela on ne peut conclure que l'ensemble limite des continus que décrit z quand w décrit la ligne qui tend vers la coupure soit un ensemble continu, c'est-à-dire réduit à un point : les continus que décrit z peuvent par exemple former des circuits entourant deux points et avoir ces deux points comme points limites [1]. Voilà exactement le point faible de la démonstration.

Mais, puisque le théorème est inexact, c'est donc en toute

---

[1] Plus exactement, dans le cas actuel, il est facile de montrer que cet ensemble limite ne peut comprendre aucun point régulier de $w(z)$; si on le supposait dénombrable, cela suffirait encore pour conclure que les points singuliers de $w(z)$ sont transcendants essentiels. Donc, l'ensemble limite comprend, soit tout l'ensemble singulier de $w(z)$, soit une portion fermée et non dénombrable de cet ensemble.

rigueur qu'une fonction peut avoir un ensemble continu de points singuliers, même un domaine d'existence borné sans qu'on puisse dire qu'aucune de ses branches ait une coupure. Bien entendu, cela suppose qu'on admet pour ce mot la définition donnée plus haut, mais il paraît bien difficile d'en imaginer une plus naturelle (1).

En tous cas, il nous faut retenir de ceci la nécessité de considérer comme insuffisants les raisonnements de la théorie des fonctions où l'intuition de l'espace est invoquée sans qu'on démontre logiquement en partant de la notion de nombre les théorèmes à énoncé géométrique sur lesquels on s'appuie (2).

Arrivons maintenant à l'exemple qui montre l'inexactitude du théorème en question. Il a été donné par M. Pompeiu en 1905, et, s'il n'a pas été remarqué plus tôt, c'est que les raisons données à l'appui par M. Pompeiu étaient insuffisantes. C'est M. Denjoy, dont la conviction n'était pas faite, comme celle de M. Painlevé ou la mienne, qui reprenant l'exemple de M. Pompeiu montra que cet exemple était probant. Il y a d'ailleurs dans la démonstration de M. Denjoy des choses inutiles. Aussi vais-je la réduire à l'essentiel.

On sait ce que M. Lebesgue appelle *aire* d'un ensemble et qu'il peut exister des ensembles discontinus d'aire non nulle (3). Soit S un tel ensemble, d'aire σ. Supposons-le borné et considérons l'intégrale

$$f(x) = \int\int_S \frac{d\omega}{z - x},$$

(1) Je dirai même que la conclusion est identique quelle que soit la définition des mots *coupure pour une branche*, pourvu qu'elle ne soit pas absurde. Il semble que le continu singulier ne soit ici qu'un amas de singularités discontinues affectées respectivement à une branche, la continuité ne provenant que de leur réunion. Ceci est à la rigueur explicable, bien que les branches soient en nombre dénombrable. La compatibilité de ce fait et de l'existence d'une frontière naturelle pour le domaine d'existence est plus paradoxale. Pour ma part, bien que forcé d'y croire, j'avoue que je ne me l'*explique* pas (*voir* p. 112).

(2) La mode qui semble s'introduire de donner des démonstrations approximatives conduisant à des énoncés sinon acquis, du moins *vraisemblables*, doit être signalée comme dangereuse. En ces matières, l'expérience nous l'apprend, la vraisemblance n'est pas un criterium d'exactitude.

(3) Voir sa Thèse ou ses *Leçons sur l'intégration*.

$d\omega$ désignant l'élément d'aire, z la variable d'intégration et x un point quelconque du plan. L'intégrale est étendue à l'ensemble S au sens de M. Lebesgue. Cette intégrale définit une fonction de x qui est évidemment holomorphe en tout point x distinct de S ou dans toute aire qui ne renferme sur son contour ou à son intérieur aucun point de S; comme S ne morcelle pas le plan, on définit bien ainsi une même fonction analytique dans tout le plan.

Je dis que $f(x)$ est continue en tout point de S et naturellement par suite dans tout le plan.

Soient en effet x et x' deux points quelconques. Évaluons $f(x) - f(x')$. On a

$$f(x) - f(x') = \int\int_S \frac{d\omega}{z - x} - \int\int_S \frac{d\omega}{z - x'} = (x - x')\int\int_S \frac{d\omega}{(z - x)(z - x')}.$$

Désignons respectivement par M, A, B les trois points z, x, x'. Nous aurons

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'| \int\int_S \frac{d\omega}{\mathrm{MA.MB}}$$

et nous augmenterons encore le second membre si, au lieu de l'intégrale étendue à l'ensemble, nous prenons la même intégrale étendue à tout un domaine, un cercle par exemple, qui comprend l'ensemble à son intérieur. Soit S′ ce domaine. Nous allons chercher une limite supérieure de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int\int_{S'} \frac{d\omega}{\mathrm{MA.MB}}$$

et nous en déduirons que $f(x) - f(x')$ est infiniment petite avec $x - x'$, ce qui est justement le point à établir.

Considérons, en posant $\mathrm{AB} = 2d$, un cercle de rayon $2d$, soit C, ayant son centre au milieu de AB; I se décompose en deux intégrales, l'une I_1, étendue au cercle C, l'autre I_2 étendue aux points de S′ extérieurs à C. Évaluons I_1. Traçons deux cercles de centres A et B et de rayon d, soient C′ et C″. L'intégrale I_1 est décomposée en trois prises dans C′, dans C″ et pour les points intérieurs à C et extérieurs à C′ et C″. Or, on a

$$\mathrm{I}_{C'} = \int\int_{C'} \frac{d\omega}{\mathrm{MA.MB}} = \int\int_{C'} \frac{r\,dr\,d\theta}{r\,\mathrm{MB}} < \int\int_{C'} \frac{dr\,d\theta}{d} = 2\pi$$

(en prenant des coordonnées polaires de centre A). De même $I_{C''} < 2\pi$.

Quant à la troisième intégrale, elle est inférieure à

$$\int\int \frac{d\omega}{d^2} = \frac{1}{d^2}\int\int d\omega = 2\pi.$$

L'intégrale I_1 est donc inférieure à 6π.

Évaluons maintenant I_2 en prenant des coordonnées polaires ayant pour centre le milieu de AB et en supposant (ce qui est possible) que S' est un cercle ayant ce même centre. Nous avons

$$I_2 = \int\int \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{(r^2+d^2)^2 - 4d^2r^2\cos^2\theta}}.$$

Or $(r^2+d^2)^2 - 4d^2r^2\cos^2\theta$ varie entre $(r^2+d^2)^2$ et $(r^2-d^2)^2$ et de plus $(r^2+d^2)^2$ est toujours inférieur à $4r^4$. Donc on a

$$\frac{(r^2+d^2)^2 - 4d^2r^2\cos^2\theta}{4r^4} < 1.$$

Ce nombre est donc inférieur à sa racine carrée. Donc on a

$$I_2 < \int\int \frac{r\,dr\,d\theta}{2r^2}\,\frac{4r^4}{(r^2+d^2)^2 - 4d^2r^2\cos^2\theta}$$

ou encore

$$I_2 < \int\int \frac{2r^3\,dr\,d\theta}{(r^2+d^2)^2 - 4d^2r^2\cos^2\theta} < \int\int \frac{2r^3\,dr\,d\theta}{(r^2-d^2)^2}$$

et enfin

$$I_2 < 4\pi\int_{2d}^{R} \frac{r^3\,dr}{(r^2-d^2)^2}.$$

Un calcul simple donne pour le second membre

$$I_2 < \frac{8\pi}{3} - 2\pi\frac{R^2}{R^2-d^2} + 2\pi\log(R^2-d^2) - 2\pi\log 3d^2.$$

Remarquons qu'il est à peu près évident qu'on peut donner à R une valeur indépendante de d. Ajoutons à l'expression ci-dessus la limite, 6π, trouvée pour I_1. Multiplions le tout par

$$|x - x'| = 2d;$$

nous obtenons

$$|f(x) - f(x')| < \mathrm{A}d + \varepsilon(d)d - \mathrm{B}d\log d,$$

A et B étant deux constantes, et $\varepsilon(d)$ une fonction qui tend vers zéro avec d. Le second membre tout entier tend donc vers zéro avec d, ce qu'il fallait montrer.

La fonction $f(x)$ est donc continue dans tout le plan. Comme elle est nulle à l'infini, ou bien elle n'a pas de points singuliers, et alors elle est identiquement nulle, ou bien elle en a, mais alors ces points ne peuvent former qu'un ensemble *discontinu* (portion de S), puisqu'ils sont transcendants ordinaires. Il reste donc simplement à voir que la fonction n'est pas identiquement nulle. Si elle l'était, le produit $xf(x)$ serait nul et par suite tendrait vers zéro quand x tend vers l'infini; or ce produit

$$xf(x) = \int\int d\omega \left(\frac{1}{\frac{z}{x} - 1} \right)$$

tend, comme on le voit facilement, vers $-\sigma$ quand x grandit indéfiniment. C'est donc la seconde conclusion qui est la vraie.

On peut même choisir l'ensemble S de façon que tous ses points soient singuliers; il suffit évidemment pour cela que toute portion de S intérieure à une aire quelconque soit d'aire non nulle, ce qui est possible.

L'hypothèse sur l'aire est essentielle dans la démonstration, sans quoi l'exemple ne prouve rien, $f(x)$ étant nulle. Il reste en tous cas à élucider le cas intermédiaire où l'ensemble est de longueur infinie (semi-superficiel) et d'aire nulle. La question est d'autant plus difficile (à résoudre complètement) que la méthode directe ne peut plus rien donner : il semble en effet bien difficile d'y introduire une hypothèse sur la densité des points de l'ensemble. Tout ce qu'on peut espérer, c'est, à défaut de théorème général, de prouver par un exemple la possibilité de telle ou telle circonstance, sur laquelle il serait évidemment téméraire d'émettre une opinion.

Peut-être sera-t-il utile de rappeler à ce sujet le théorème suivant, démontré dans ma Thèse : *On peut faire passer une ligne par tous les points d'un ensemble discontinu.* Cette ligne, natu-

rellement, est une ligne cantorienne, car, pour une ligne de Jordan, la question ne se pose pas. Quand z décrit cette ligne, w décrit dans son plan une ligne qui épuise tous les points singuliers de la fonction inverse, c'est-à-dire qui passe par tous les points d'un ensemble continu (ceci en supposant que les points singuliers de $w(z)$ sont transcendants essentiels). Il y a sans doute une relation entre ce fait que la ligne w comprend une infinité continue de points reliés deux à deux, peut-on dire, par des arcs continus et la densité des points de l'ensemble singulier donné sur la ligne z. Cette relation caractériserait encore des cas où les points singuliers *peuvent* être transcendants ordinaires (1).

---

(1) La ligne qui passe par les points d'un ensemble discontinu n'est pas un continu quelconque ; c'est la frontière d'un domaine. M. F. Riesz, dans une Note des *Comptes rendus*, a essayé de démontrer qu'on pouvait faire passer une ligne simple de Jordan par les points d'un ensemble discontinu. Sa démonstration est inexacte, comme je l'ai montré (*Comptes rendus*, t. CXLII, 1906, p. 763. Le fait est peut-être exact, quoique la frontière d'un domaine ne soit pas toujours une ligne de Jordan. *Voir* sur ces questions mes Mémoires des *Annales de l'École Normale*, 1909, et des *Acta* (à paraître); *voir* aussi la Note, p. 21.

Au moment où je termine la correction des épreuves, une Note de M. A. Denjoy paraît dans les *Comptes rendus*, t. 151, 11 juillet 1910, où il démontre le résultat que M. Riesz avait essayé de démontrer. Consulter également la Note déjà citée du même auteur (p. 63) sur les questions qui font l'objet de ce Chapitre.

CHAPITRE V.

LES LIGNES SINGULIÈRES.

Les lignes singulières ont attiré l'attention des chercheurs dès le début de la théorie des fonctions analytiques. Des exemples simples avaient montré la possibilité de ce cas, et des recherches générales s'imposaient.

Or, si l'on examine à l'heure actuelle les résultats acquis, on constatera sans peine que les résultats *généraux* sont excessivement rares, à peu près inexistants. Tout se réduit à une collection d'exemples montrant que les circonstances les plus diverses sont compatibles avec la notion de fonction analytique. Ce n'est que dans la Thèse de M. Painlevé qu'on trouve quelques essais de démonstrations générales. Il parvient ainsi à des énoncés très intéressants qui demanderaient à être étendus à un plus grand nombre de cas.

La plupart des exemples simples dont je viens de parler sont relatifs à des séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. Des procédés de formation assez généraux ont été donnés pour de telles séries; on peut même dire avec M. Borel, en précisant convenablement le sens de ces mots, que le cas où le cercle de convergence est coupure est pour une série de Taylor donnée *le cas général.*

Examinons rapidement ces exemples devenus classiques. Le premier est celui de Weierstrass relatif à la série

$$f(z) = \sum a^n z^{b^n}$$

qui définit dans le cercle $|z| < 1$ une fonction analytique. Si l'on examine la valeur de $f(z)$ sur la circonférence de ce cercle, on trouve que c'est une fonction continue de l'arc dépourvue de dérivée (au moins si $ab < 1$). Ce cercle est donc coupure essen-

tielle de la fonction. M. Hadamard a étendu ces propriétés aux séries

$$f(z) = \sum a_n z^{b_n},$$

dans lesquelles les entiers b_n, pour les valeurs de l'indice supérieures à un certain entier p, ont un plus grand commun diviseur qui croît indéfiniment avec p. Le raisonnement est assez simple pour être reproduit : la fonction présente nécessairement un point singulier z_0 sur le cercle de convergence. Supprimons alors les p premiers termes de la série, ce qui revient à négliger une fonction holomorphe et par suite ne change pas les points singuliers. La nouvelle série, $\varphi(z)$, ne change pas si on change z en $z . e^{\frac{2ik\pi}{q}}$, q désignant le diviseur commun aux b_n. Donc la fonction φ, et par suite f, admettent, outre le point z_0, les points singuliers

$$z_0 e^{\frac{2ik\pi}{q}},$$

c'est-à-dire, puisque q peut grandir indéfiniment, un ensemble partout dense de points du cercle et par suite tout le cercle.

Un exemple plus curieux encore est dû à M. Fredholm. Il est relatif à la série

$$f(z) = \sum a^n z^{n^2},$$

qui admet aussi son cercle de convergence pour coupure, et qui cependant, sur ce cercle, est continue ainsi que toutes ses dérivées. Si l'exemple est simple, la démonstration de ce fait est assez artificielle, puisqu'elle fait appel aux théorèmes de Mme Kowalewski sur les équations aux dérivées partielles.

En adoptant notre terminologie relative aux points singuliers, nous voyons donc que les points singuliers qui appartiennent à une ligne peuvent être des points transcendants ordinaires contrairement à ce qui se passe en général.

D'ailleurs, je m'empresse d'ajouter que sur une ligne singulière il peut y avoir des points d'indétermination, complète ou non. Tous les points de la ligne peuvent même être essentiels, comme le montrent des exemples faciles à former.

Supposons de même que tous les points de la ligne soient trans-

cendants ordinaires; on peut donc dire qu'en chaque point de la ligne, la fonction prend une valeur déterminée. L'ensemble de ces valeurs peut être une fonction *discontinue* quelconque de l'arc. Je n'en donne pas d'exemple, mais je tenais à signaler ces différents cas. Il en résulte que, sur une coupure, à peu près toutes les circonstances qui sont compatibles avec l'existence d'un point singulier peuvent effectivement se présenter.

Il est certain qu'en tout point z_0 de la ligne, on ne peut pas trouver un cercle dans lequel la fonction $w(z)$ soit continue et admette une dérivée; car, d'après le théorème de M. Goursat, la fonction serait holomorphe dans le cercle, donc en z_0. Mais est-ce là le seul résultat qu'on puisse espérer obtenir ? Ne doit-il rien résulter de particulier du fait que les points singuliers sont réunis en ligne ? Il faut bien espérer qu'il y a dans ce cas aussi certaines impossibilités bien caractérisées. Mais on devine qu'il y aura à les découvrir une double et profonde difficulté. D'abord, celle qui résulte, comme je vais l'expliquer, de la notion même de ligne; et, en second lieu, il y a une difficulté dans la découverte même des énoncés : tant de circonstances sont possibles, qu'on ne voit pas très bien lesquelles pourraient ne pas l'être. La suite va montrer que, lors même qu'on a trouvé un énoncé vraisemblable, un exemple vient souvent le mettre en défaut. En résumé, c'est dans les lignes singulières qu'on trouve les points singuliers avec, ou à peu près, la généralité que leur attribue la définition; et la détermination du point jusqu'où s'étend cette généralité est quelque chose de très délicat, et de très important en même temps. C'est pourquoi j'ai un peu insisté sur cette façon de poser le problème.

La notion de ligne.

Il importe de remarquer avant tout que les lignes singulières dont il s'agit ici sont des continus cantoriens, et c'est par conséquent par des méthodes analogues à celles utilisées dans ce Livre qu'on peut seulement arriver à des théorèmes tout à fait généraux. Je ne crois donc pas inutile d'expliquer un peu la complication du problème.

Nous pouvons laisser de côté le cas où, dans le voisinage du

point singulier à étudier, figurent des *points* singuliers discrets. Dans ce cas, en effet, les théorèmes généraux des Chapitres précédents s'appliquent : le point est en général point d'indétermination complète ou incomplète, ou point limite de tels points. Le seul cas réellement nouveau est celui d'une fonction pourvue uniquement de *lignes* singulières. Mais ces lignes peuvent être en nombre infini, même pas dénombrable ; elles peuvent tendre les unes vers les autres ou vers des points (isolés en tant que points, mais limites de lignes), etc. On pourra commencer par étudier le cas d'une ligne unique, et simplifier encore en la supposant irréductible, ou même en prenant une ligne simple de Jordan. L'étude devient un peu plus simple. Mais, bien entendu, on n'a plus alors de théorèmes véritablement généraux.

La continuité dans une aire.

Je vais appliquer les remarques qui précèdent à l'étude d'une question, la seule qu'on se soit jamais posée au sujet des lignes singulières sans la voir se résoudre en sens contraire de celui qui était le plus vraisemblable.

Elle est posée nettement dans la Thèse de M. Painlevé, [1] et, comme nous allons voir, elle n'est pas encore résolue d'une façon complète.

Nous avons vu qu'une fonction peut être continue sur une ligne singulière. Est-ce qu'elle peut l'être des deux côtés de la ligne, ou encore (l'expression : les deux côtés d'une ligne cantorienne pouvant ne pas avoir de sens) dans une aire contenant la ligne ? C'est là une question intéressante, car elle permettrait, si elle était résolue par la négative, d'affirmer dans certaines applications, que deux fonctions sont prolongement analytique l'une de l'autre, ou encore qu'une fonction est holomorphe dans une aire.

Je commence par un cas très particulier, celui d'une fonction continue dans une aire et prenant sur une coupure située dans cette aire une valeur constante qu'on peut supposer nulle. M. Painlevé a alors démontré dans sa Thèse que la fonction ne peut pas exister ou plutôt est nulle identiquement. Mais sa

(1) *Annales de Toulouse*, 1888.

démonstration, qui s'applique à une ligne cantorienne, suppose cette ligne *isolée* de toutes singularités. J'ai, comme on l'a vu plus haut (*voir* p. 72), fait subir à cette démonstration les modifications nécessaires pour aboutir au résultat suivant : une fonction *multiforme* qui n'a que des points transcendants ordinaires *en chacun desquels* elle est nulle ne peut pas posséder d'ensemble continu de points singuliers. J'ai souligné les points importants de cet énoncé. D'abord il s'applique à une fonction multiforme quelconque, et nous avons déjà, plus haut, utilisé le théorème sous cette forme générale. En second lieu, et c'est là une restriction importante, il faut que la fonction soit nulle, non seulement sur la coupure, mais en tous les points singuliers voisins qui, par conséquent, doivent tous être transcendants ordinaires.

Revenons alors au cas d'une fonction uniforme et précisons l'état actuel de la question. Si une fonction a une ligne singulière *isolée*, le raisonnement et la conclusion précédente s'appliquent. Si des points singuliers en quantité *dénombrable* tendent vers tout point de la ligne, le résultat est encore vrai, car, ces points étant points d'indétermination complète, la fonction est complètement indéterminée sur la ligne. Mais les deux cas suivants sont possibles : celui où la ligne donnée est limite de lignes singulières, sur lesquelles la fonction est continue, et celui où des points singuliers formant un ensemble discontinu tendent vers tous les points de la ligne; en effet, dans ce dernier cas, ces points peuvent être, soit points d'indétermination incomplète, soit points transcendants ordinaires, et leurs points limites peuvent dans les deux cas être transcendants ordinaires. Le premier cas (ligne limite de lignes) paraît exactement aussi compliqué que le cas général que je vais maintenant étudier.

Arrivons donc au cas où, sur la ligne singulière, la fonction est continue sans être constante. M. Painlevé a amorcé la question en démontrant le théorème suivant : *Si deux fonctions analytiques définies une de chaque côté d'une ligne prennent la même suite continue de valeurs sur la ligne, cette ligne est coupure artificielle de chacune, et nos deux fonctions se prolongent analytiquement.* La démonstration, basée sur l'intégrale de Cauchy, est très simple. Mais on voit combien les réserves de l'énoncé sont grandes. La ligne dont il s'agit est une ligne simple de M. Jordan : cela est

nécessaire pour qu'elle ait deux côtés. La démonstration, que je ne reproduis pas, suppose même que la ligne est rectifiable. Sans doute on pourrait essayer, en modifiant la démonstration, de l'étendre à un certain nombre de cas nouveaux ; mais, tant qu'on ne parviendra pas à un théorème absolument général, il est permis de juger de peu d'intérêt de telles extensions.

Abordons enfin l'énoncé du théorème général. *Soit une fonction uniforme dans une aire, et continue dans cette aire : peut-on affirmer qu'elle soit holomorphe à l'intérieur de l'aire?*

Or, on aperçoit immédiatement deux façons de comprendre l'énoncé précédent, suivant qu'on se place au point de vue de Cauchy ou local, ou au point de vue de Weierstrass ou général. Le premier point de vue est le suivant. La fonction $w = f(z)$ est supposée définie en tout point de l'aire, et elle est continue. Est-elle analytique dans l'aire, c'est-à-dire développable en série de Taylor en tout point de l'aire, et, sinon, que peut-on dire de l'ensemble des points où elle n'est pas développable, ou points singuliers? M. Pompeiu, qui a étudié cette question dans son Mémoire déjà cité (sur certains points duquel des réserves sont nécessaires), appelle ce problème *problème de Briot et Bouquet*. Il est bien facile de montrer par un exemple que des points singuliers formant des lignes peuvent se trouver dans l'aire. Voici un exemple plus simple que celui de M. Pompeiu, que M. Painlevé m'a communiqué oralement vers 1903 et auquel j'ai fait allusion dans ma Thèse.

Sur le segment $0 - 1$ de l'axe des x, concevons un ensemble E parfait, non dense, et définissons pour $0 \leq x \leq 1$ une fonction *scalaire* $f(x)$, continue, croissante, et constante dans tous les intervalles contigus à E. Soit $z = x + iy$ un point du plan. La fonction

$$\varphi(z) = f(x)(x + iy)$$

est définie en tout point du carré construit sur le segment $0 - 1$ de Ox. Elle est continue dans ce carré : en effet, dans chaque bande déterminée par un intervalle contigu à E, elle se réduit au produit de z par une constante, cette constante différant d'une bande à l'autre, et très peu d'une bande à une bande voisine. Cette fonction est analytique dans chaque bande, mais admet comme lignes singulières les parallèles à Oy menées par les points de E.

Si l'on veut que l'ensemble singulier forme un seul continu, on multipliera la fonction précédente par une fonction uniforme définie au-dessus de Ox, admettant Ox pour coupure, et continue sur cette coupure. Il y aura un seul continu singulier.

Le second point de vue, celui de Weierstrass, est bien différent. On prolonge analytiquement une fonction uniforme dans une aire. On obtient ainsi en chaque point de l'aire une valeur déterminée de la fonction, soit que ce point soit régulier, soit qu'étant singulier, il soit transcendant ordinaire. On suppose que ces valeurs sont continues, c'est-à-dire que la valeur en un point est *la* limite des valeurs en *tous* les points voisins. La fonction a-t-elle effectivement des points transcendants *dans* l'aire, ou y est-elle holomorphe (1)?

Elle peut certainement admettre un ensemble de points singuliers d'aire non nulle. Mais il y a évidemment de grandes précisions à apporter à ce premier résultat, surtout relativement aux lignes singulières qui peuvent exister dans l'aire.

On peut conclure facilement dans le cas très particulier suivant : la fonction est constante sur chacune de ses lignes singulières, la valeur de cette constante différant d'une ligne à l'autre, et ces lignes formant un ensemble dénombrable. Laissons, en effet, de côté le cas déjà étudié où une des coupures est isolée. Supposons la fonction bornée dans l'aire donnée et dans tout le plan, et constatons alors qu'on peut reproduire dans tous ses détails, en utilisant la fonction inverse, la démonstration de la page 72 ou celle indiquée en note page 84. La fonction inverse $z(w)$ a des coupures. Le long d'une de ces coupures elle prend des valeurs qui dans le plan des z ne peuvent former que des points singuliers de la fonction $w(z)$ et par suite forment *une* ligne singulière. Or, sur cette ligne w est *constante* et par suite ne saurait prendre un ensemble continu de valeurs. On peut dire d'une façon assez suggestive que toute ligne singulière ne saurait être transcendante ordinaire (2). Mais il n'y a pas à se dissimuler que le cas précédent est très particulier.

(1) Je dis *dans* l'aire, car rien ne s'oppose, nous le savons, à ce que, dans ces conditions, la frontière de l'aire, ou une partie de celle-ci, soit singulière.

(2) Il est d'ailleurs facile, et cela pourrait être intéressant, d'étendre à une ligne singulière considérée en bloc la notion de domaine d'indétermination. On aurait des lignes transcendantes ordinaires ou essentielles, etc.

L'allure sur une coupure.

Comment terminer ce Chapitre où je n'ai fait qu'énoncer des résultats, et des résultats très incomplets ? Je le ferai en indiquant combien à mon avis cette question de l'allure d'une fonction sur une coupure est une question neuve. Question des plus difficiles d'ailleurs, comme toutes celles qui ne peuvent être abordées qu'en revenant à la notion même du prolongement analytique.

En dehors des recherches dont il est question dans le paragraphe précédent, bien des questions particulières peuvent être posées. Revenons, par exemple, sur les fonctions nulles sur une coupure, en prenant le cas plus simple d'une coupure isolée. La fonction ne peut alors pas être nulle en tout point de la coupure. On peut se proposer néanmoins de caractériser l'ensemble de ses zéros sur la coupure. Dans sa Thèse, si intéressante, et que je regrette, pour conserver à ce Livre une certaine unité de méthode, de ne pouvoir étudier plus à fond dans ce Chapitre. M. Fatou montre par exemple qu'un ensemble parfait de mesure nulle peut très bien annuler la fonction ([1]). On peut essayer de préciser davantage le nombre maximum de zéros de la fonction ([2]).

J'arrête ici ces considérations. L'intérêt de ces questions est manifeste, et leur difficulté, si grande qu'elle paraisse, ne doit pas détourner les chercheurs ([3]).

([1]) *Acta*, t. XXXII. J'avais dans ma Thèse posé cette question. J'étais convaincu que le résultat contraire devait être vrai, et le considérais naturellement comme difficile à aborder.

([2]) Je remarque que, la fonction n'étant pas forcément dans cette question continue sur la ligne, cet ensemble n'est pas fermé.

([3]) Depuis que ses Leçons ont été faites, M. Denjoy s'est occupé des questions qui font l'objet des deux Chapitres précédents. Je n'ai pu faire état de ses travaux, car aucune démonstration n'est encore publiée, et les résultats paraissent encore trop peu coordonnés; mais je tenais à les signaler en espérant que leur auteur fournira lui-même bientôt un exposé complet. Il semblerait qu'il faille faire intervenir dans ces études d'abord l'*aire* de l'ensemble singulier, et en second lieu des propriétés géométriques plus compliquées encore des ensembles de points (*voir* A. Denjoy, *Comptes rendus*, t. 149, 1910, p. 726 et 1048; et L. Zoretti, *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 162).

CHAPITRE VI.

LES FONCTIONS MULTIFORMES.

Je dois logiquement étudier maintenant les points singuliers des fonctions multiformes. Comme nous le verrons dans ce Chapitre, un certain nombre de recherches sur les fonctions uniformes exigent la démonstration préalable de théorèmes sur les fonctions multiformes, et inversement. D'ores et déjà, on peut dire que, si la théorie des fonctions multiformes est d'origine bien récente, il est peut-être excessif de prétendre qu'elle soit inexistante, comme le disait M. Boutroux en 1908. Outre les recherches très générales comme celles des Chapitres précédents (qui sont bien, au fond, des études des fonctions multiformes), on voit se constituer différentes directions de recherches : fonctions implicites, fonctions définies par une équation différentielle, catégories de fonctions à singularités simples, conduisant à une esquisse de classification.

Je m'occuperai ici uniquement d'une catégorie de fonctions multiformes dont l'étude se rencontre notamment dans l'étude des fonctions entières : ce sont les fonctions inverses de fonctions uniformes. On se rendra compte de leur importance *intrinsèque* en songeant que, d'après le théorème de M. Poincaré, toute fonction multiforme est une fonction uniforme d'une fonction inverse de fonction uniforme. En outre, de nombreuses recherches introduisent de telles fonctions. Dans les Chapitres précédents, il en a déjà été question.

Soit donc $w = f(z)$ une fonction uniforme et soit $z = \psi(w)$ la fonction inverse. Une propriété essentielle de cette fonction est la suivante, due à M. Painlevé :

Si la fonction uniforme $f(z)$ n'a pas de coupures, la fonction $z(w)$ n'a pas de points transcendants essentiels. Ses points singuliers sont des points critiques algébriques et des points transcendants ordinaires.

Soit w_0 un point singulier relatif à une branche $z(w)$ poursuivie le long d'une ligne L. Je dis d'abord que le domaine d'indétermination de la fonction $z(w)$ en ce point ne comprend aucun point régulier. En effet, s'il comprenait un point régulier z_0, en ce point, la fonction w (qui est uniforme) *prendrait* la valeur w_0, et la branche correspondante de la fonction z admettrait w comme point régulier ou critique algébrique (ce dernier cas se présentant si $\frac{dw}{dz} = 0$ pour $z = z_0$). Or, le domaine d'indétermination est continu. Donc, puisque la fonction w n'a pas d'ensemble continu de points singuliers, le domaine d'indétermination est réduit à un point.

Comment intervient l'hypothèse que la fonction $w(z)$ est uniforme ? S'il n'en était pas ainsi, le fait que le point z appartient au domaine d'indétermination ne serait pas suffisant pour conclure qu'en ce point, il y a effectivement une branche de $w(z)$ qui *prend* la valeur w_0. Le raisonnement serait cependant valable pour une fonction $w(z)$ à un nombre fini de branches.

Voyons ce que donne le raisonnement précédent quand la fonction $w(z)$ présente des coupures. La première partie subsiste entièrement. Le domaine d'indétermination en un point w_0 ne se compose que de points singuliers d'un seul tenant, situés sur une même coupure par conséquent. Ce domaine D ne comprend d'ailleurs aucun point extérieur au domaine d'existence de $w(z)$, puisqu'en un ensemble dense de points de D la fonction w doit exister. Supposons par exemple que la fonction w n'ait pas d'autre singularité qu'une ligne L. Si un point w_0 n'est pas transcendant ordinaire pour $z(w)$, le domaine D relatif à ce point comprend un arc de L, et sur cet arc la fonction prend une valeur constante w_0.

Plus exactement, à une aire très petite entourant w_0, correspond une aire Δ attenante à l'arc de coupure L, et l'on peut dans Δ trouver un chemin régulier pour $w(z)$, chemin qui tendra vers L, et le long duquel w prend des valeurs toutes voisines de w_0. Soit ζ un point de L; tout chemin tendant vers L (du bon côté, celui où est Δ) finit par pénétrer dans Δ et y rester. Donc, quel que soit ce chemin, w tend vers w_0. Le point ζ est donc transcendant ordinaire; or, nous avons vu que, au moins si L est coupure isolée, la fonction ne peut prendre la valeur constante w_0 en tous ces

points. Donc il ne peut y avoir dans ce cas non plus de point d'indétermination.

Soit w_0 un point transcendant ordinaire, auquel correspond le point z_0 sur L. Il ne faut pas croire naturellement que, quel que soit le chemin suivi pour aboutir à z_0, w y tende vers w_0. Il est même parfaitement possible que z_0 soit point essentiel.

Je vais m'arrêter un peu plus longuement sur le cas d'une fonction inverse de fonction *entière* $w = f(z)$. La fonction $z(w)$ n'a que des points transcendants ordinaires en chacun desquels elle prend la valeur $z = \infty$. Si, en général, je suppose que w a un point essentiel isolé z_0, en chaque point transcendant de la fonction $z(w)$, celle-ci prend la valeur z_0.

Une question intéressante qui se pose immédiatement est la suivante : Que peut-on dire de général sur l'ensemble de ces points transcendants ?

D'abord cet ensemble ne peut renfermer aucun continu. Nous sommes, en effet, dans le cas étudié page 72. Si la fonction z prenait la valeur z_0 en tout point d'une ligne, elle se réduirait à une constante.

Je vais tâcher de caractériser les points transcendants et je tâcherai de déduire de là des propriétés de leur ensemble. Je serai obligé de faire à ce sujet quelques remarques sur les seuls résultats qui aient été publiés à ma connaissance sur ce sujet : une Note de M. Hurwitz (¹), une de M. Denjoy, et différents articles de M. Boutroux. Je serai obligé de faire quelques réserves sur certains résultats énoncés par ce dernier.

Les domaines d'indétermination.

Abandonnant pour quelques instants mon exposé systématiquement analytique, je me vois entraîné à une sorte de digression, dont le lien avec les questions précédentes ne tardera pas à ressortir et qui me paraît devoir jeter sur elles un peu de clarté.

(¹) *Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 877. — DENJOY, *Comptes rendus*, t. 145, 1907, p. 106. — BOUTROUX, *Comptes rendus*, t. 145, 1907, p. 708 et 1046; *Leçons sur les équations différentielles* (Mémoire des *Annales de l'École Normale*, 1908).

M. Painlevé semble avoir pensé que sa définition du domaine d'indétermination pouvait être précisée. Telle quelle, elle nous donne un premier renseignement sur l'allure de la fonction dans un entourage *complet* du point singulier. Si l'on veut une précision plus grande, une deuxième approximation, on pourra avec M. Borel la chercher dans l'étude des types de croissance. On peut aussi se proposer, pour creuser davantage l'allure de la fonction, d'étudier la façon dont elle se comporte quand on se rapproche du point singulier *d'une façon déterminée*. M. Painlevé distingue déjà les chemins qui tournent indéfiniment autour du point, de ceux qui ne tournent pas. Généralisons de la façon suivante.

Soit L un chemin tendant vers un points ingulier a (et a seul) le long duquel la fonction $w(z)$ est prolongeable jusqu'en a. Traçons un cercle C de centre a et de rayon ε; le chemin L finit par ne plus en sortir; considérons l'ensemble des valeurs prises par w le long du dernier arc de L intérieur à C. Si nous marquons ces valeurs dans le plan w, et si nous ajoutons à cet ensemble son dérivé, le résultat sera un *continu*, comme on le voit aisément. Quand ε tend vers zéro, ce continu tend vers un continu limite E. J'appellerai ce continu *le domaine d'indétermination suivant le chemin* L. La suite, par la diversité des cas qui peuvent se présenter, fera comprendre l'intérêt de cette dénomination.

Voici quelques propriétés de ce domaine d'indétermination généralisé. Je dis que, pour une fonction entière par exemple, il existe des chemins d'indétermination complète, c'est-à-dire tels que le domaine d'indétermination suivant un tel chemin comprend tout le plan.

Soit $w = f(z)$ la fonction entière. Donnons-nous, dans le plan w, un ensemble de points dénombrable et partout dense. Supposons (cela n'a rien d'essentiel) qu'aucun des points de cet ensemble ne soit valeur exceptionnelle au sens de M. Picard, en sorte que l'équation $f(z) = w_n$, w_n étant un point de l'ensemble, admet une infinité de racines. A chaque point w_n faisons correspondre une de ces racines choisie de la façon suivante : A w_1 correspond une quelconque, z_1, des racines de l'équation $f(z) = w_1$; à w_2 une des racines, z_2, de l'équation $f(z) = w_2$ de module supérieur à $|z_1|$, et ainsi de suite : si à w_n correspond z_n, à w_{n+1} correspond une racine

de l'équation $f(z) = w_{n+1}$ de module supérieur à $|z_n|$. Rien n'empêche de choisir les z_n de façon que leur module croisse indéfiniment.

Construisons alors le chemin L ainsi : suivons le rayon Oz_1, jusqu'au cercle de rayon $|z_2|$; suivons ce cercle jusqu'au point z_2, puis le rayon Oz_2 prolongé jusqu'au cercle $|z_3|$, et ainsi de suite. Nous obtenons une ligne L sans point double tendant vers le point à l'infini et lui seul. Sur ce chemin, w est indéterminée, car, quelque grand que soit un cercle, la portion du chemin L extérieure à ce cercle passe par des points où w prend des valeurs voisines de toute valeur donnée.

En modifiant légèrement la démonstration, on parvient à l'énoncé plus général suivant : *Si en un point z_0 le domaine d'indétermination est* D, *il existe des chemins le long desquels le domaine d'indétermination est également* D. On prendra encore un ensemble w_n dense dans D. Dans un cercle ε de centre z_0, la branche $w(z)$ qu'on considère peut ne pas prendre la valeur w_1, mais elle prend des valeurs différant de w_1 en valeur absolue de moins de η_1. Marquons un des points z, z_1, où il en est ainsi. Traçons un cercle de centre z_0 passant par z_1. Dans ce cercle, la branche w prend, sinon la valeur w_2, du moins des valeurs qui en diffèrent en module de moins de η_2, et ainsi de suite. Traçons tour à tour les chemins qui permettent de parvenir aux points $z_1, z_2, \ldots$, avec les valeurs voulues. La réunion de ces chemins donne un chemin total qui tend vers z_0 seul et où le domaine d'indétermination est D pourvu que les η_i tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Mais il est plus intéressant encore d'étudier, pour un point d'indétermination complète par exemple, les chemins où la fonction est déterminée. C'est ce que je vais faire très brièvement.

Je fais d'abord une remarque au sujet de la Note de M. Hurwitz. Il dit que, d'après le théorème de Weierstrass, on pourrait croire à l'existence de chemins sur lesquels une fonction entière (par exemple) tend vers une valeur donnée d'avance; il voit très bien qu'il n'en est rien, mais la raison qu'il en donne n'est pas la bonne : ce serait, d'après lui, parce que le chemin qu'on fait suivre à la variable z ne tend pas vers le seul point à l'infini. Il est facile de se rendre compte que ce ne serait pas là un obstacle. Soient w_0 la valeur donnée, $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ un ensemble de points ten-

dant vers w_0. Marquons dans le plan z des points z_1, z_2, ..., tels qu'on ait $w_n = f(z_n)$ et de modules croissant indéfiniment. Joignons-les par droites et arcs de cercle comme tout à l'heure, ou encore en ligne droite. Nous obtenons bien un chemin qui tend uniquement vers le point à l'infini. Doit-on dire que sur ce chemin w tend vers w_0 ? Non évidemment : en introduisant notre façon de parler, on voit que le domaine d'indétermination suivant ce chemin *comprend* le point w_0, mais il ne se réduit pas à ce seul point : là est la vraie cause du fait signalé par M. Hurwitz.

Faisons encore une remarque. Soient deux chemins L, L' tendant vers l'infini et le long desquels w tend vers deux valeurs différentes a, b. Ces chemins peuvent se couper, mais leurs points de rencontre ne peuvent avoir pour point limite le point à l'infini, car sans cela il y aurait sur L une infinité de points, s'éloignant à l'infini où w est infiniment voisin de b; donc, sur L, w ne tendrait pas vers a. Comme d'autre part, on peut, sans changer la valeur limite de w, déformer L dans toute portion à distance finie, on pourra toujours supposer que L et L' n'ont aucun point commun.

Chaque chemin L où la fonction tend vers une limite, peut servir à construire une aire telle que, pour tous les chemins intérieurs à cette aire et s'éloignant à l'infini, la limite existe et soit la même. En effet, soit a la valeur limite sur L. Considérons l'ensemble des points du plan où $|w - a| < \varepsilon_1$: ces points forment des aires dont l'une doit comprendre tout un arc infini de L; soit D_1 cette aire. Donnons à ε_1 une nouvelle valeur ε_2 plus petite; nous aurons une aire D_2 intérieure à la première, et ainsi de suite, en faisant tendre les ε vers zéro. Constituons alors une aire D de la façon suivante : prenons un point intérieur à D_2, traçons un cercle de centre O passant par ce point, et ne conservons que la portion de D_1 intérieure à ce cercle; de même, ne conservons que la portion de D_2 intérieure à un cercle qui pénètre à l'intérieur de D_3, et ainsi de suite. L'aire D formée par la réunion des parties conservées jouit de la propriété voulue. C'est la propriété qui sert pour M. Boutroux de définition à ce qu'il appelle une langue; mais, si on ne la précise pas comme je viens de le faire, des difficultés se présentent. Je n'y insiste pas davantage pour l'instant, et je reviens à l'étude de la fonction inverse.

Les fonctions inverses de fonctions entières.

Soit une fonction entière (ou méromorphe) $w = f(z)$ et soit w_0 une valeur exceptionnelle de cette fonction au sens primitif de M. Picard, c'est-à-dire supposons que l'équation $w_0 = f(z)$ n'ait pas de racines. Traçons dans le plan w un petit cercle C de centre w_0 et prolongeons dans ce cercle toutes les branches de la fonction $z(w)$. Nous obtenons ainsi dans le plan z une infinité (dénombrable) d'aires. Je dis que toutes ces aires contiennent le point à l'infini (point frontière) et par conséquent forment un seul continu [1].

Soit en effet D une de ces aires. Je dis que, lorsque le cercle C varie d'une façon continue, il en est de même de D. Je veux dire par là que, si C tend vers un cercle C_1, l'ensemble limite de D est l'une des aires qui correspondent à C_1, soit D_1. En effet, d'abord un point z de l'ensemble limite de D fait prendre à w une valeur qui est voisine de points de C, qui par conséquent est dans C_1, et inversement, puisque les cercles C, C_1 ont une partie commune, il y a au moins une aire D_1 correspondant à C_1 qui a des points dans D, et un point quelconque de cette aire D_1 fait prendre à z une valeur située dans C_1 (à son intérieur même si l'on veut) et qui, par suite, est située dans C.

En d'autres termes, quand C diminue, chaque aire D diminue, peut même se décomposer en plusieurs, mais non disparaître brusquement; si D n'allait pas à l'infini, il en résulterait que, lorsque le rayon de C tend vers zéro, il y aurait des points z limites de D où w prend la valeur w_0, ce qui est absurde. Donc tous les domaines D sont des aires ayant l'infini pour point frontière et se réduisant à ce seul point quand C tend vers zéro.

Si w_0 est telle que l'équation $w_0 = f(z)$ ait un nombre fini de racines, à un cercle C entourant w_0 correspondent un nombre fini d'aires D entourant ces racines et une infinité d'aires qui s'étendent à l'infini: en effet, au voisinage du point à l'infini, la fonction w doit

[1] Je rappelle que, pour moi, un continu n'est pas forcément borné. J'appelle *continu* tout ensemble qui serait continu au sens de Cantor si l'on transformait le plan par homographie, ou en sphère par une inversion.

prendre sinon la valeur w_0, du moins des valeurs infiniment voisines.

Enfin, si l'équation $w_0 = f(z)$ a *moins de racines* que l'équation $w = f(z)$ pour les valeurs générales de w (1), l'une des aires D doit encore comprendre le point à l'infini; on le voit aussi aisément.

Cette propriété des *valeurs exceptionnelles* (généralisées) est, comme nous allons le voir, à peu près caractéristique des points singuliers transcendants de la fonction $z(w)$ (2). Le raisonnement que je vais faire sera, bien entendu, absolument général, et il en résultera un lien entre les valeurs exceptionnelles et les points singuliers, qui n'exige aucune hypothèse sur le genre de la fonction w. Le fait qu'à C correspond dans le plan des z notamment une aire qui s'étend à l'infini montre que, lorsque w tend vers w_0, il y a *des* branches de la fonction $z(w)$ qui tendent vers *des* racines de l'équation

$$w_0 = f(z),$$

tandis que d'autres s'évanouissent en devenant infinies : chacun de ces deux ensembles de valeurs est d'ailleurs infini en général, et l'équation $w_0 = f(z)$ peut encore être appelée *équation exceptionnelle* sans qu'il faille attribuer à ces mots un sens aussi précis que celui défini dans la note précédente.

Je me propose donc d'établir le théorème suivant : *Une condition nécessaire pour que w_0 soit point transcendant de $z(w)$ est que, parmi les aires qui, dans le plan z, correspondent à un cercle de centre w_0, l'une au moins comprenne le point à l'infini* (3).

La condition est nécessaire, car, si w_0 est transcendant, c'est qu'il existe un chemin L tendant vers w_0 et (w_0 seul) le long duquel

(1) Tout en en ayant une infinité. *Voir* Remoundos, *Annales de Toulouse*, t. XIX. Le quotient du nombre de racines de ces équations dans un cercle de rayon R est infiniment petit avec $\frac{1}{R}$.

(2) Il est maintenant facile de comprendre ce que j'ai dit plus haut des rapports du théorème de M. Picard avec les singularités de la fonction inverse.

(3) Naturellement comme frontière, car si le point singulier était intérieur à cette aire, la fonction w tendrait *uniformément* vers w_0 quand z tendrait vers le point singulier; celui-ci serait transcendant ordinaire.

une branche z n'est pas régulière. Le chemin λ correspondant dans le plan des z ne peut définir un domaine d'indétermination continu, car, en tout point de ce continu, la fonction w serait constante; ce domaine ne peut non plus se réduire à un point régulier, car w_0 serait régulier ou critique algébrique pour la branche en question. Donc ce domaine se réduit au point essentiel à l'infini, c'est-à-dire que λ tend vers l'infini (et l'infini seul). Comme L finit par être intérieur au cercle C, cela nous donne une aire D qui comprend tout un arc de λ jusqu'à l'infini. Donc D comprend le point à l'infini.

Demandons-nous maintenant si la réciproque est vraie. Supposons que C donne des aires dont l'une comprenne le point à l'infini, soit D : nous avons au voisinage de l'infini un ensemble continu de points que j'appelle D, où w prend des valeurs situées dans C. Mais, étant donnés deux points de D, il peut être impossible de les joindre sans aller à l'infini. Prenons un point z de D et considérons le domaine d, portion de D, qu'on peut atteindre sans sortir de D à partir de z et sans passer par l'infini. Quand z décrit ce domaine d, w décrit tout ou partie de C; d'ailleurs, je dis que w décrit tout C, car sans cela on verrait sans peine qu'il y aurait dans C toute une aire de points qu'on ne pourrait atteindre régulièrement en partant d'une branche déterminée de $z(w)$. Il y aurait donc une coupure pour cette fonction, ce qui est impossible, car nous sommes dans un cas où le théorème de la page 72 s'applique.

Supposons que le point w_0 ne soit ni limite de points transcendants, ni limite de points critiques algébriques. Alors je dis qu'il est effectivement transcendant (isolé) lui-même. En effet, on peut dans ce cas tracer un cercle C de centre w_0 à l'intérieur duquel toutes les branches de $z(w)$ sont régulières sauf peut-être au point w_0. Supposons que ce point soit régulier pour toutes ces branches. Alors elles seront toutes uniformes dans ce cercle. Considérons en particulier la branche z qui, dans le plan w, donne naissance à l'aire d. D'après une remarque déjà utilisée (*voir* p. 70), quand w décrit la frontière de C, z doit décrire la frontière de d, ce qui est absurde puisque cette frontière passe par le point à l'infini, point essentiel. Il faut donc bien supposer que w_0 est point singulier pour une branche au moins.

Le même raisonnement montre que l'on ne peut pas supposer w_0 critique algébrique. La branche z qui donne naissance à d serait algébroïde dans C (quand z décrit d, w décrit d n fois), mais les frontières de d et de C continueraient à se correspondre, et, comme lorsque w décrit celle de C, z ne décrit celle de d qu'un nombre fini de fois, il faudrait qu'un point *déterminé* de la circonférence de C donne pour z une valeur infinie, ce qui est impossible.

Donc w_0 est un point transcendant.

Voyons dans quelle mesure le raisonnement peut se conserver lorsque w_0 est limite de points singuliers. Quand on substitue à C un cercle intérieur C_1, on obtient un nouveau domaine D_1 allant à l'infini et dont certaines portions, d_1, sont intérieures à d (j'appelle toujours portion d_1 un domaine qu'on peut atteindre sans sortir de D_1 et sans aller à l'infini). Comment se fait-il que l'aire d puisse ainsi se scinder en plusieurs (même une infinité) d_1 ? Considérons la branche $z(w)$ qui, poursuivie dans C, donne naissance à d. Cette branche se permute avec d'autres soit autour de w_0, soit autour des points singuliers situés dans C, et l'on ne peut séparer ces diverses branches. Mais il peut arriver que deux branches de $z(w)$ prises dans C, qui relevaient de la même branche z, parce qu'elles se permutaient entre elles dans C, ne se permutent plus dans C_1, et par suite deviennent distinctes : cela arrivera quand les points critiques qui permutaient ces deux branches sont entre C et C_1 [1].

On peut préciser encore. Supposons qu'on puisse trouver une infinité de cercles C_n tendant vers w_0 et que parmi les aires d_1 intérieures à d, les aires d_2 intérieures à l'ensemble des d_1, ..., on puisse choisir une suite d'aires $d, d_1, d_2, \ldots$, chacune intérieure à la précédente et comprenant toutes le point à l'infini. Alors je dis que w_0 est un point transcendant. En effet, on tracera un chemin l défini ainsi : joignons un point de d à un point de d_1 par un chemin situé dans d; le point précédent de d_1 à un point de d_2 par un chemin situé dans d_1, ainsi de suite, cela de façon que l tende vers l'infini et l'infini seul, ce qui est manifestement possible. Sur ce chemin, w est régulière et tend vers w_0 et w_0 seul,

---

(1) Cela arrivera même *brusquement* quand C, en diminuant, passera par un certain point critique (algébrique ou transcendant).

car le chemin décrit par w doit *rester* dans le cercle C_n à partir d'un certain point, quel que soit n. Or, on sait que cela suffit pour que w_0 soit transcendant.

Examinons dans quel cas w_0, tout en étant limite de points singuliers, pourra ne pas être transcendant. Supposons-le régulier pour toutes les branches de $z(w)$; le raisonnement est à peu près le même s'il est critique algébrique. Alors chacune des branches $z(w_0)$, soient $z_1(w_0) \dots z_n(w_0)$, est régulière dans un cercle C_n de centre w_0, mais le rayon de C_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ ou du moins admet zéro pour limite inférieure. Soient deux branches z_1 et z_2, holomorphes dans les cercles C_1 et C_2; supposons C_1 intérieur à C_2. Quand w décrit le plus petit cercle C_1, les deux branches z_1 et, z_2 décrivent des aires sans point commun qui ne vont pas à l'infini, puisque ces branches sont régulières dans ce cercle. Quand w décrit C_2, on ne sait plus si z_1 est régulière, et, si w décrit un cercle légèrement supérieur à C_3, il peut arriver que z_1 et z_2 qui ne sont plus régulières se permutent entre elles. Les deux aires dans le plan z se trouveront réunies en une seule, et on ne sait plus si cette aire unique ne va pas à l'infini. Peut-être peut-on parvenir à un résultat simple pour un point w_0 qui n'est limite que de points critiques algébriques : il ne serait pas étonnant que ce point soit toujours transcendant pour une branche au moins. La chose est beaucoup plus douteuse pour un point limite de points transcendants. En effet, pour un tel point, il est évident qu'à tout cercle C qui l'entoure correspond une aire dans le plan des z qui s'étend à l'infini; mais on voit bien pourquoi il en est ainsi : c'est parce que les points transcendants qui sont voisins du point donné donnent des valeurs très grandes de z, et c'est parce qu'on voit bien comment les choses peuvent se passer qu'il ne semble pas du tout indispensable que le point donné soit lui-même transcendant pour une branche.

Les remarques précédentes, qui paraîtront peut-être un peu longues, permettent donc de caractériser à la fois : les points transcendants, les points limites de points critiques algébriques, les points limites de points transcendants. Pour tous ces points, quand w décrit le cercle C, z décrit des aires qui vont à l'infini.

On peut cependant différencier le premier cas des deux autres

de la façon suivante. Quand on a un point w_0 transcendant *isolé*, l'aire D est formée d'un certain nombre (infini) d'aires *d*. Quand C diminue, le nombre de ces aires n'augmente et ne diminue pas : chaque aire *d* donne naissance à *une* aire d_1. En effet, pour que *d* se décompose en deux ou davantage, il faut que deux branches permutables dans C ne le soient plus dans C_1. Or, si w_0 est transcendant isolé, l'échange de deux branches ne se fait qu'autour de w_0 lui-même, et par suite se fait dans C_1 dès qu'il est possible dans C. Au contraire, dans les autres cas où w_0 est limite de points singuliers, le nombre des aires *d* est variable.

Les résultats de M. Boutroux.

D'après ce qui précède, que savons-nous, en somme, sur l'ensemble des points transcendants? D'après le théorème de la page 72, cet ensemble ne peut comprendre aucun continu. *Est-ce un ensemble fermé?* Je n'ai justement développé longuement les explications précédentes que pour bien pénétrer le lecteur de ce fait qu'il est nullement établi que l'ensemble des points transcendants soit fermé.

C'est pourquoi l'on ne peut considérer comme démontrés d'une façon absolument générale les résultats énoncés par M. Boutroux dans son Mémoire *Sur les fonctions inverses de fonctions entières*. Ces résultats ne sont valables, et même pas tous ([1]), que lorsque l'ensemble des points transcendants est formé uniquement de points isolés, c'est-à-dire d'un nombre fini de points : cette hypothèse intervient en effet plusieurs fois dans les démonstrations : ce cas se présente vraisemblablement pour les fonctions de genre fini, d'après un théorème de M. Denjoy qui n'est même, je crois, donné par son auteur que comme vraisemblable, mais qui est encore à démontrer. Mais, dès qu'il y a un point limite de points transcen-

([1]) En effet, comme je l'ai dit plus haut, on est en droit de demander plus de rigueur dans certaines démonstrations. Il y aurait lieu surtout de préciser la définition des langues contiguës et des frontières d'une langue, comme je l'ai fait à la page 104 pour la définition même de la langue. C'est ce qui explique les réserves du texte.

dants, transcendant lui-même, les choses sont beaucoup plus compliquées.

On ne saurait nier que la question qui présente le plus d'intérêt et qui doit être élucidée la première ne soit relative au nombre des points transcendants. Il est tout à fait vraisemblable que leur ensemble est dénombrable ([1]). En tous cas, si l'on veut aboutir à un résultat absolument général, il n'est pas douteux qu'on devra procéder par une méthode directe analogue à celles suivies dans ce Livre.

L'étude d'une fonction entière suivant un chemin infini rendra aussi des services dans la même question. Cette étude paraît devoir devenir prépondérante dans la théorie des fonctions entières : elle réalise en quelque sorte une troisième approximation, la première étant fournie par le théorème de Weierstrass, la seconde par le théorème de M. Picard et ses généralisations. Elle n'est pas encore susceptible d'un exposé systématique. Tout se borne pour l'instant à des résultats très intéressants, mais quelque peu épars.

Au premier rang, je signale l'exemple donné par M. Lindelöf ([2]) d'une fonction entière qui tend vers zéro quand la variable s'en va à l'infini sur une droite quelconque (sauf l'axe réel et positif) et ceux donnés par MM Mittag-Leffler et Malmquist. Naturellement, ces fonctions ne tendent pas uniformément vers zéro, et, quand une ligne L s'éloigne à l'infini en coupant une infinité de droites qui passent par l'origine, la fonction peut sur L tendre vers une limite quelconque non nulle ou être indéterminée.

Signalons encore les résultats déjà assez généraux de MM. Phragmen et Lindelöf ([3]). Je n'entre à ce sujet dans aucun détail, me bornant à constater que le moment de tenter une étude d'ensemble paraît être venu.

([1]) Ce résultat est énoncé dans une Note de M. Boutroux (26 juillet 1909). Mais la démonstration est inexacte, comme on s'en rendra compte en lisant le dernier paragraphe du Chapitre IV.

([2]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1903.

([3]) *Acta*, t. XXVIII et XXXI.

Antibes, 25 septembre 1909.

NOTE

SUR LA NOTION DE COUPURE.

Je ne crois pas inutile d'éclaircir par quelques exemples ce que j'ai dit page 57 au sujet des coupures des fonctions multiformes.

Voici d'abord un exemple très simple que me suggère M. Borel et qui montre la condensation des points singuliers aux environs d'une ligne. Considérons le cercle de rayon $1 + \frac{1}{p}$ (p entier) ayant pour centre l'origine (plan des z); divisons-le en p parties égales au moyen de p points (dont l'un sera sur l'axe réel, si l'on veut). On obtient ainsi, quand p prend toutes les valeurs entières, un ensemble dénombrable de points que j'appelle a_n. Considérons la fonction

$$(1) \qquad f(z) = \sum \frac{A_n}{\sqrt{z - a_n}},$$

les A_n formant une série absolument convergente. L'expression (1) définit, comme on le voit aisément, à l'extérieur du cercle de rayon 1, une fonction analytique [la série (1) est uniformément convergente dans toute aire qui ne contient aucune a_n à son intérieur ou sur sa frontière]; cela est vrai quelles que soient les déterminations choisies pour les radicaux; enfin, si l'on considère deux déterminations de la fonction en un point z, ce sont, cela est presque évident, deux branches d'une même fonction analytique que j'appelle $f(z)$.

Le cercle de rayon 1 est une coupure pour la fonction, car tout chemin régulier, l, aboutissant à un point du cercle donne un rayon d'holomorphie infiniment petit quelle que soit la branche poursuivie. C'est là une coupure *pour une branche* (il n'y a qu'à

prendre pour chemins λ (page 55) des cercles intercalés entre ceux qui portent les pôles critiques).

Pourtant, entre un chemin λ et le suivant, des points critiques se sont rencontrés qui semblent modifier la branche. Il peut donc sembler que l'expression *coupure pour une branche* soit mal choisie. Mais il faut remarquer que *la branche* dont on parle est celle qu'on prolonge *sur l*.

Voici un exemple de ligne singulière non coupure pour une branche. Formons d'abord, comme à la page 34, une fonction $g(u)$ qu'on peut supposer bornée dans toute aire finie, ayant deux branches (ou une infinité) au-dessus de l'axe réel, uniforme au-dessous. L'échange des branches se fait autour d'un point critique A, d'ordonnée a, situé sur la partie positive de l'axe complexe. Considérons ensuite une droite D_n, parallèle à l'axe réel, d'ordonnée $\frac{1}{n}$, et un point A_n sur l'axe complexe, d'ordonnée $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)$. Considérons la fonction

$$f_n(z) = g\left[2n(n-1)a\left(z - \frac{i}{n}\right)\right].$$

On peut déterminer les nombres λ_n de façon que la série

$$f(z) = \sum \lambda_n f_n(z)$$

converge quelles que soient les déterminations choisies pour les $f_n(z)$, tout au moins dans une aire ne renfermant aucun des points A_n. Pour la fonction analytique $f(z)$ ainsi définie, l'axe réel est une ligne singulière. Ce n'est pas une coupure pour une branche. En effet, on ne peut pas trouver un chemin tendant vers un point de l'axe réel (et un seul) le long duquel la fonction $f(z)$ soit régulière, car, si sur ce chemin toutes les fonctions f_n sont régulières, la fonction $f(z)$ admet un rayon d'holomorphie au moins égal à l'écart de l'ensemble des A_n au chemin suivi; pour la branche considérée, l'axe réel est alors régulier.

En multipliant $f(z)$ par une fonction uniforme ayant l'axe réel pour coupure et définie au-dessus de celui-ci, le domaine d'existence de la nouvelle fonction est borné et le fait signalé subsiste.

On peut, dans l'exemple précédent, substituer aux droites D_n un ensemble dénombrable de droites parallèles, et l'on aura autant de droites non coupures pour une branche que l'ensemble D_n aura de droites limites.

Dans ces exemples, quoique la coupure étudiée ne soit pas une coupure pour une branche, les droites D_n en sont. Je signale l'intérêt qu'il y aurait à former un exemple aussi simple que possible où il n'y aurait aucune ligne coupure pour une branche, avec un domaine d'existence borné. On mettrait ainsi bien en évidence la façon dont ce fait singulier peut se produire.

FIN.

ADDENDUM.

Après une dernière lecture, je crois utile, afin qu'on ne se méprenne pas sur ma pensée, de bien préciser que le raisonnement de M. Painlevé, dont il est question page 82, n'a jamais été donné par lui comme une vraie démonstration, mais comme un moyen possible d'aboutir à la solution; de plus, M. Painlevé a été le premier à déclarer insuffisante toute démonstration qui ne serait pas d'un caractère arithmétique.

L. Z.

TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
44639 Quai des Grands-Augustins, 55.